トポロジー新人セミナー 2012

Topology Fresher's Seminer 2012

アブストラクト

名前のアルファベット順に掲載

浅尾 崇史	東京工業大学 M1	Morse 理論の基本定理と path space への応用
舟橋 泰紀	神戸大学 M1	結び目理論
船越 紫	奈良女子大学研究員	Pseudo-fiber surfaces and unknotting operations for links
風呂川 幹央	広島大学 M2	双曲多様体と Ford 領域
阪田 直樹	広島大学 M2	双曲的結び目と標準的分割
原 唯一郎	九州大学 M1	handlebody-knot について
橋爪 惠	奈良女子大学 M1	On the homomorphism induced by region crossing changes on link diagram
林 晋	東京大学 M2	Supermanifold
細井 徹	早稲田大学 D1	リーマン幾何とリッチフロー
泉田 信行	九州大学 M1	Diffeology
柏木 智希	高知大学 M1	今研究していること
川元 祐奈	高知大学 M1	今取り組んでいること
川崎 盛道	東京大学 M2	ハミルトン微分同相群とその上のカラビ擬準同型の応用
岸本 昌幸	高知大学 M1	3 次元多様体論
小林 竜馬	東京理科大 D1	L-S category について
松岡 勇気	名古屋大学 M1	C*環の K 理論と位相的 K 理論
三浦 嵩広	神戸大学 D2	絡み目の flat braidzel index と flat braidzel length
望月 厚史	京都大学数理解析研究所 M1	量子不変量の概略
新甫 洋史	九州大学 M1	絡み数と平方剰余記号について
岡崎 建太	京都大学数理解析研究所 D3	平面代数と低次元トポロジーへの応用について
岡崎 未希子	高知大学 M2	Hopkins' Chromatic Splitting Conjecture について
折田 龍馬	東京大学 M1	Applications of Morse Theory
坂田 繁洋	首都大学東京 D2	一番熱い場所の漸近挙動
清水 理佳	広島大学特任助教	結び目理論でゲームを作ろう
滝岡 英雄	大阪市立大学 D1	結び目の多項式不変量について
立原 有太郎	高知大学 M2	BOUSFIELD 類について
田中 淳波	東京大学 M1	曲線複体
植木 潤	九州大学 M2	結び目と素数の岩澤理論
矢口 義朗	群馬工業高等専門学校講師	ブレイド群の自然な作用とその応用について
吉ざわ 希恵	高知大学 M1	現在取り組んでいる課題

Morse 理論の基本定理と path space への応用

東京工業大学数学専攻修士１年
浅尾崇史

1　多様体に関する Morse 理論の基本定理

M を n 次元 C^∞ 級多様体とする。

補題 1.1 (Morse の補題)
$p \in M$ を f の非退化な臨界点とする。このとき p のある近傍 U における局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ で $i = 1, \ldots, n$ に対し $x^i(p) = 0$、かつ U 上で至る所

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda) + (x^{\lambda+1})^2 + \cdots + (x^n)^2$$

を満たすようなものが存在する。
この λ は *unique* に定まる。これを p における f の指標 *(index)* と呼ぶ。

定義 1.1
M 上の C^∞ 級関数 f が *Morse* 関数 $\Leftrightarrow$ f の各臨界点が非退化

定理 1.1 ((有限次元版)Morse 理論の基本定理)
f が M 上の *Morse* 関数であり、各 $M^a = \{p \in M : f(p) \leq a\}$ はコンパクトであるとする。
このとき M は、指標 λ の各臨界点に対応して次元 λ の *cell* を持つような *CW*-複体とホモトピー同値である。

2　多様体上の path space への応用

定義 2.1
M 上の２点 p, q を結ぶ区分的に滑らかな *path* $\omega : [0,1] \to M$ 全体からなる集合を $\Omega(M; p, q)$ と書き、これを *path space* と呼ぶ。

定義 2.2
エネルギー関数 $E : \Omega(M; p, q) \to \mathbb{R}$ を、

$$E(\omega) = \int_0^1 \| \frac{d\omega}{dt} \|^2 dt$$

により定義する。

ここでは詳しくは書けないため引用符つきになってしまうが、$\Omega(M;p,q)$ を"無限次元多様体"とみなすと、エネルギー関数 E が $\Omega(M;p,q)$ 上の"Morse 関数"となっていることがわかる。[*1]

定義 2.3
E の臨界点 $\gamma:[0,1]\to M$ を M 上の測地線と呼ぶ。
γ はエネルギーが極小、すなわち局所的に見ると最短経路となっている。

定義 2.4
測地線 γ 上の 2 点 p,q がある特殊な関係[*2]にあるとき、それらは γ に沿って互いに共役であるという。

定理 2.1 (Morse 理論の基本定理)
M を完備なリーマン多様体とし、$p,q\in M$ をどのような測地線に沿っても共役でない 2 点とする。（すなわち p と q が"一般の位置にある"）このとき $\Omega(M;p,q)$ は、p から q への指標 λ の各測地線に対応して次元 λ の cell を持つような可算 CW-複体とホモトピー同値である。

参考文献

[1] モース理論, J. Milnor, 志賀浩二訳, 吉岡書店

[*1] 多様体における接空間や微分の定義のアナロジーから、path space における接空間や微分を定義することができる。
[*2] 両端点で 0 であり、かつ恒等的には 0 でない γ に沿った Jacobi 場が存在する。

結び目理論

神戸大学理学研究科 数学専攻 前期課程 1 年
舟橋泰紀

4 回生のころは文献[1]を読んで結び目について一通りのことを学びました。
修士になってからはおもに文献[2]で結び目の表作成に関することを勉強しています。
学部生の頃は図式の変形など初等的な手法で議論ができることに魅力を感じて学んできましたが、修士になってやや厳密な勉強を始めてからは三次元多様体や同相写像を使った記述のほうがしっくりくるようになりました。当初思い描いていたこととは変わってきてしまいましたが、これからも色んな視点から勉強していけたらいいなと感じています。
今のところ、結び目の解消操作に興味を持っていて最近は[3]で Ascending Number という比較的新しい不変量について学びました。

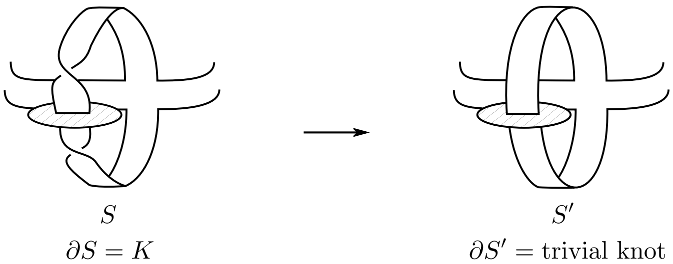
文献[1] C.C.アダムス / 結び目理論入門
文献[2] Thistlethwaite, M. B. 1985. Knot tabulations and related topics. In aspect of Topology, edited by I. M. James and E. H. Kronheimer : 1-76. London: Camridge Univ, Press
文献[3]M. Ozawa 2008. Ascending Number of Knots and Links

Pseudo-fiber surfaces and unknotting operations for links

船越　紫
奈良女子大学

Scharlemann-Thompson は link の種数に関する条件の下で、以下のように unknotting operation は結び目の minimal genus Seifert surface 込みで考えることができることを示した。

unknotting number 1 の knot K に対して、K の minimal genus Seifert surface S はある surface と Hopf band の plumbing になっており、K を trivial knot にする unknotting operation は、この Hopf band のひねりをほどくことに対応している。またこれによって得られた surface を S' とする。



特に K を unknotting number 1 の fibered knot とすると、このとき K の minimal genus Seifert surface は一意となることが知られているので、この S は fiber surface になる。
そこでこれに対応する S' がどのような surface なのか？という疑問が生じるが、これに関しては、次の事が既に示されている.

（結果 A）S' は pre-fiber surface と呼ばれるものになっている.

（結果 B）また逆に、pre-fiber surface が与えられたとき、それに 1 回ひねりを加えて fiber surface が得られるのはどのような場合か？という逆問題についても解答が既に知られている。

私の研究では、この結果の unknotting number が 2 以上の knot への拡張について取り扱っている．そのためにまず上記の pre-fiber surface の自然な一般化として、pseudo-fiber surface of level n (n は非負の整数) という surface を定義し，この pseudo-fiber surface of level n に対して、上記の逆問題に対応する結果を与えた. また上記の結果 A に関しては，pseudo-fiber surfaces の ascending sequence と呼ばれる概念を提案し、この定式化が、crossing number が 10 以下の結び目と torus knot に対してその unknotting number を実現する unknotting operations をうまく表現している。

双曲多様体と Ford 領域

風呂川 幹央
広島大学理学研究科数学専修士課程 2 年

サーストンの幾何化予想以降, その重要性を増してきた 3 次元双曲多様体について, その構造を見る 1 つの道具として, Ford 領域というものがあげられる.
まずその Ford 領域 を説明するために 3 次元双曲多様体を定義する.

Def. X : 完備 *3* 次元双曲多様体
$:\Leftrightarrow \exists \Gamma < \mathrm{Isom}^+\mathbb{H}^3 s.t. \Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^3$: 真性不連続 , 自由
$X = \mathbb{H}^3/\Gamma$

このように, 3 次元双曲多様体は 3 次元双曲空間の等長変換群の部分群により定まる.
また 3 次元双曲空間の等長変換群について以下が知られている.

Fact. $\mathrm{Isom}^+\mathbb{H}^3 \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$
特に, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ による一次分数変換により与えられる.

この事実により, 3 次元双曲空間の等長変換は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の点である.
その $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ の点に対し, 次の isometric circle, isometric hemisphere が定義される.

Def. $X \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) s.t. X(\infty) \neq \infty$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
X の *isometric circle* $I(X)$
$I(X) := \{z \in \mathbb{C} \mid |A'(z)| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + d| = 1\}$
X の *isometric hemisphere* $Ih(X)$
$Ih(X) : I(X)$ を境界にもつ $\mathbb{H}^3$ の超平面
また, $Ih(X)$ を境界にもつ $\mathbb{H}^3$ 内の半球を $Dh(X)$,
$Dh(X)$ の $\mathbb{H}^3$ における閉外部を $Eh(X)$ と書く.

初めに述べた Ford 領域はこの isometric circle, isometric hemisphere を用い, 以下のように定義される.

Def. $\Gamma < \mathrm{Isom}^+\mathbb{H}^3$
Γ の Ford 領域 $Ph(\Gamma)$ とは
$Ph(\Gamma) := \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty} Eh(\gamma)$

また, 3 次元双曲多様体に関して, Mostow rigidity theorem という大定理により, カスプ付き有限体積完備双曲多様体の双曲構造はただ 1 つに定まることが知られている. ゆえに, Ford 領域の組み合せ構造はカスプ付き有限体積完備双曲多様体に関する完全不変量となっている.

この Ford 領域 を用いた双曲多様体の先行研究として, Jorgensen による punctured torus group の研究 [1], 及びそれを拡張した秋吉-作間-和田-山下による二橋結び目に関する研究 [2] があげられる.

ここで, punctured torus group とは, 一点穴開きトーラスに対し, その基本群の PSL(2,$\mathbb{C}$) への離散的かつ効果的な表現により得られる PSL(2,$\mathbb{C}$) の部分群のことを言う.

私の今現在の研究は, この Jorgensen や秋吉-作間-和田-山下 らの用いた手法を一点穴開きクラインボトルに適用し, その双曲構造を記述することである.

参考文献

[1] Troels Jorgensen, On pairs of punctured tori , in Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Y. Komori, V. Markovic, C. Series, Ed.), Lond. Math. Soc. Lecture notes 299 (2003), 183-207.

[2] Hirotaka Akiyoshi, Makoto Sakuma, Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, Punctured torus groups and 2-bridge knot groups I, Lec. Notes in Math. 1909, Springer (2007).

双曲的結び目の標準的分割

阪田 直樹

広島大学理学研究科数学専攻 修士課程二年

結び目とは S^1 を S^3 へ smooth に埋め込んだ像を言う。また双曲的結び目とは補空間に完備な双曲構造が入る結び目のことを言う。初めて発見された双曲的結び目は 8 の字結び目であり、これは 1970 年半ばに Riley と Jorgensen によってそれぞれ独立に証明された。この事実は Thurston へ影響を与えるに至り、1970 年の終りに彼は次の定理を証明した。

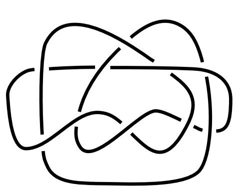
定理. 任意の結び目 K に対して以下のうち唯一つ、いずれかが成り立つ*:*

1. K はトーラス結び目
2. K はサテライト結び目
3. K は双曲的結び目

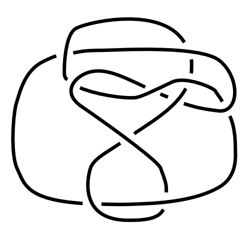
今日、結び目は ほとんどが 双曲的であることが知られている。

さて、双曲的結び目に関しては以下の興味深い事実が知られている。1988 年の論文で Epstein-Penner は、任意の有限体積を持つカスプ付き双曲多様体に関して標準的分割と呼ばれる理想多面体分割が存在することを示した。ここで双曲的結び目の補空間はこの条件を満たしているので、任意の双曲的結び目の補空間に対して標準的分割が存在する。標準的と呼ばれるだけあって、実はこの標準的分割は結び目の完全不変量となっている。さらに標準的分割は Weeks が開発したコンピュータプログラム SnapPea を用いることにより構造を絵で見ることが出来る。したがって個々の双曲的結び目に対しては、結び目をコンピュータへ入力することでそれらが同じものであるか、違うものであるかをすぐに判定することが出来る。

例. *Rolfsen* 著 *Knots and Links* の巻末に載っている結び目のテーブルは有名であるが、このテーブルの *10* 交点 *161* 番目と *162* 番目は 同じ結び目である。

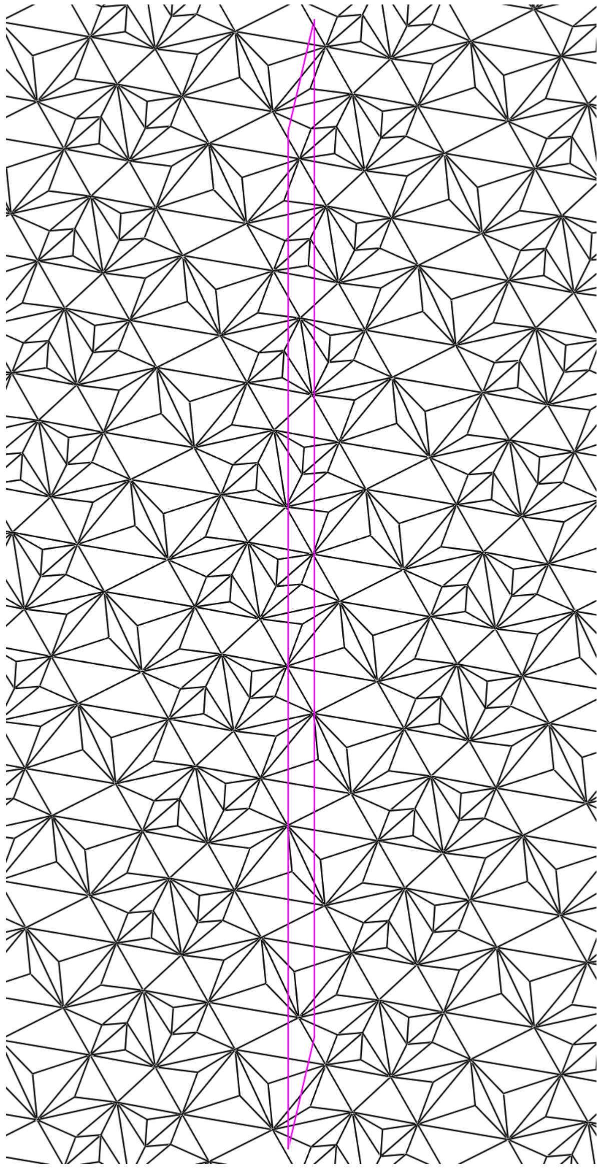


10_{161}



10_{162}

10 交点 161 番目と 162 番目の標準的分割を SnapPea で出力した図を以下に示す:



参考文献

[1] C.C. アダムス, 金信泰造 訳『結び目の数学』初版 (培風館, 1998)

[2] Francis Bonahon『Low-Dimensional Geometry: From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots』first ed. (Amer Mathematical Society, 2009)

handlebody-knot について

九州大学　大学院　修士１年　原　唯一朗

2012 年 7 月 31 日

handlebody-knot(link) とは

handlebody-knot は handlebody を S^3 に埋め込んだもので定義される。また、handlebody の disjoint union を S^3 に埋め込んだものを Handlebody-link という。(Figure1)
２つの handlebody-link が isotopy で変形しあうとき、２つの handlebody-link は同値であるという。
一般に handlebody-link というと、その isotopy による同値類のことを指す。

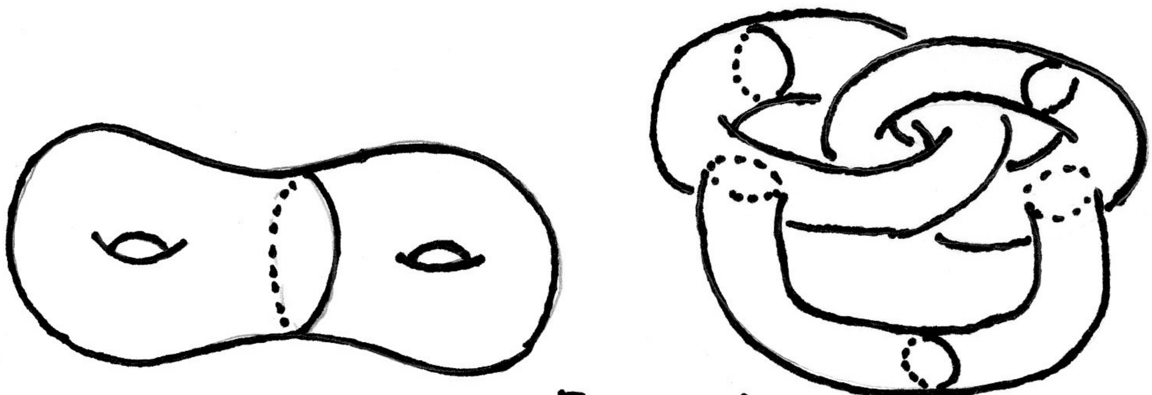


Figure 1

handlebody-link と spatial trivalent graph との対応

handlebody-link は spatial trivalent graph と対応づけることができる。(Figure2)

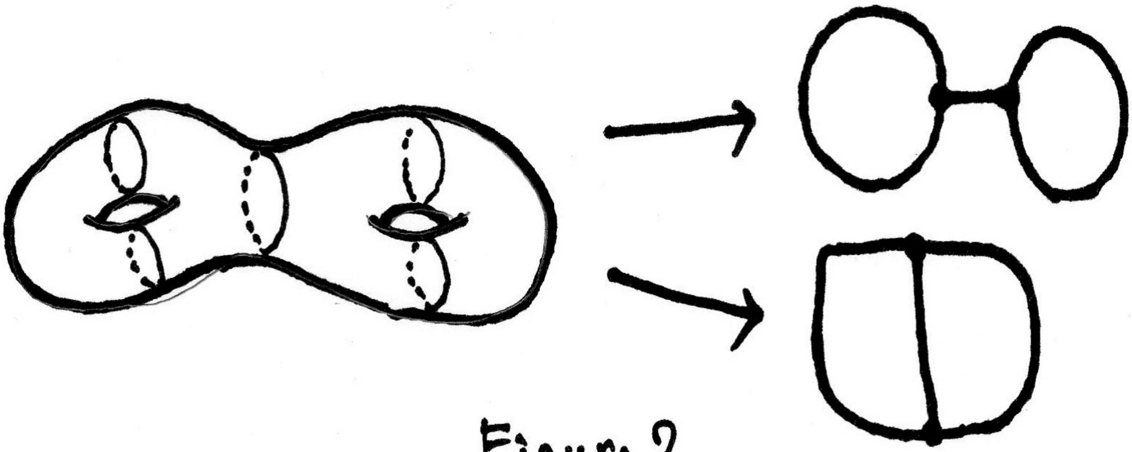
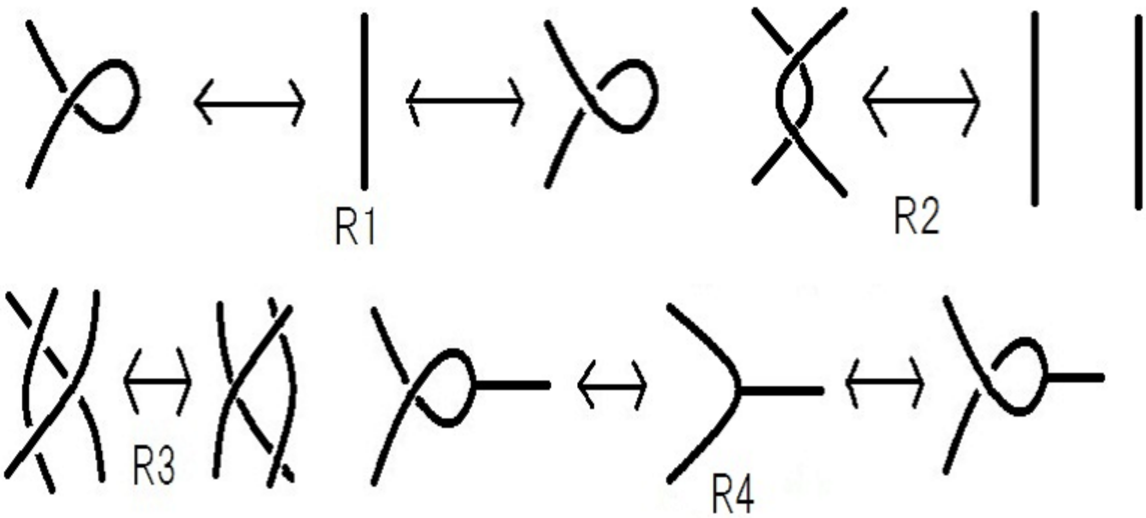
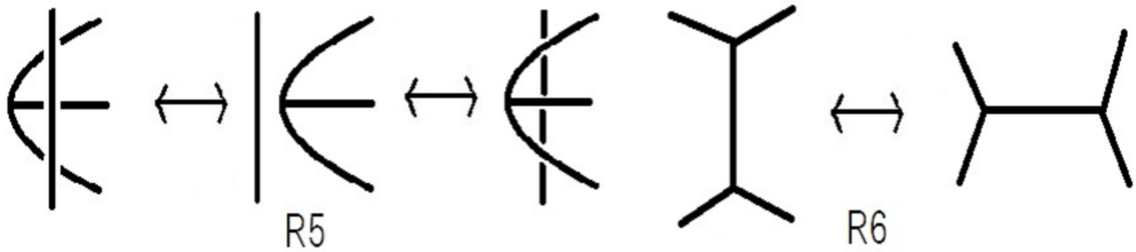


Figure 2

この spatial trivalent graph の diagram のことを handlebody-link の diagram という。
この時、次の定理が成り立つ。
定理:{handlebody-links}={diagrams of handlebody links}/R1-R6 moves





これらの事から handlebody-link が link の一般化になっていることが分かる。

今後の課題

handlebody-link の diagram に対して上手い (?)orientation を見つけることがこの先の研究の課題である。
そこから結び目における多項式不変量などを応用して不変量を見つけたい。

References

Atsushi Isii, Moves and invariants for knotted handle bodies

On the homomorphism induced by region crossing changes on link diagram

Megumi Hashizume

Cheng and Gao defined an incidence matrix $M(D)$ of a link diagram D to describe the region crossing change of D, which was introduced by A. Shimizu et al. The matrix $M(D)$ can be regarded as a representative of the homomorphism from $(\mathbb{Z}_2)^{R(D)}$ to $(\mathbb{Z}_2)^{c(D)}$ where $R(D)$ is the set of regions of D, and $c(D)$ is the set of crossing of D. In this talk, I will give a basis of the kernel of this homomorphism, which has neat geometric representatives.

Supermanifold

林 晋

東京大学大学院数理科学研究科修士課程二年

1 Superspace と Superalgebra

以下、基礎体は $\mathbb{R}$ とする.

Definition 1.0.1 線形空間 M が *superspace*
$\Leftrightarrow$ 線形空間の直和分解

$$M = M_0 \oplus M_1 \tag{1}$$

が指定されている.

このとき $v \in M_i$ $i \in \mathbb{Z}_2$ にたいし $p(v) = i$ とかいて、$p(v)$ を v の *parity* という.

Definition 1.0.2 A：superspace が superalgebra
$\Leftrightarrow$ A は単位元を持つ結合的代数かつ
積 $A \times A \to A$ は even bilinear i.e. $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ をみたす.

Definition 1.0.3 A：superalgebra が *supercommutative*.
$\Leftrightarrow$ $a, b \in A$ homogeneous elements（i.e. $\ni i = 0, 1$ $s.t.$ $a \in A_i$）にたいし、

$$ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba. \tag{2}$$

Example 1.0.1

$$\mathbb{R}^{p|q} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes \bigwedge(x_1, x_2, ..., x_q) \tag{3}$$

は supercommutative superalgebra になる.

2 Supermanifold

Definition 2.0.4 対 $(|M|, \mathcal{O}_M)$ が次元 $p|q$ の *supermanifold*.
$\Leftrightarrow$ $|M|$: Hausdorff space $\mathcal{O}_M$: a sheaf of commutative superalgebras that is locally isom to $\mathbb{R}^{p|q}$

参考文献

[1] Leites, *Introduction to the theory of supermanifolds*, 1980.

[2] Honhold,Kreck,Stolz,Teichner, Differential forms and 0-dimensional supersymmetric field theories, 2011

リーマン幾何とリッチフロー

早稲田大学基幹理工学研究科
細井徹

2012 年 8 月 1 日

まず，接続と曲率について準備してから，リッチフローについて述べます．リッチフローの式は, 基本的と思われるリーマン幾何を用いて表される．

以下では，M を C^∞ リーマン多様体, すなわち，各点 $p \in M$ について，双線型写像 g が存在して，

$$g : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

で，g は正定値かつ対称で，p に，C^∞ によるとする．T_pM の基底を $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ とし，$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) \in \mathbf{R}$ とする．

1 接続

多様体 M 上の曲線 $c(t)$ にたいして，$c(t)$ に沿うベクトル場 $X(t) \in T_pM$ があるとする．このとき，$X(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \cdots, \xi^n(t))$ とかけている．これを微分して

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{d\xi^1}{dt}(t), \frac{d\xi^2}{dt}(t), \cdots \frac{d\xi^n}{dt}(t) \right)$$

とかく．このとき $\frac{dX}{dt} \in T_pM$ かどうかは，わからない．そこで

$$\frac{dX}{dt} = T_{c(t)}M \text{ の成分} + \text{それ以外の成分}$$

と分解する．このときの $T_{c(t)}M$ の成分のことを X の共変微分とよび，$\frac{DX}{dt}$ とかく．M が曲線の時には，法ベクトル n を用いて，

$$\frac{dX}{dt} = \frac{DX}{dt} + < \frac{dX}{dt}, n > n$$

となる．

さらにベクトル場 X を接ベクトル $v \in T_pM$ で微分する事を考える．$v \in T_pM$ の積分曲線 $c(t)$ をとり，$\nabla_v X$ をベクトル場 X を $c(t)$ 上に制限して，

$$\nabla_v X = \frac{DX}{dt}$$

と定義する．これを X の v 方向の共変微分という．そして v のかわりにベクトル場 $\{Y_p\}_{p\in M}$ を考え，$\left\{\nabla_{Y_p}X\right\}_{p\in M}$ をベクトル場 Y によるベクトル場 X の共変微分という，

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

が定義でき，∇ を接続という.

2　曲率

曲率 R を,X, Y, Z を M 上のベクトル場とし，

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

によって定義する．断面曲率 K_σ を $p \in M$,$u, v \in T_pM$ に対して，

$$K_\sigma := \frac{< R(u,v)v, u >}{\parallel u \times v \parallel^2}$$

によって定義する．リッチ曲率 Ric を

$$Ric(v,w) := \Sigma_{i=1}^n < R(e_i,v)w, e_i > \in \mathbf{R}$$

によって定義する.

3　リッチフロー

(M, g_0) をリーマン多様体とする．この計量 g_0 をパラメータによって変形する事を考える．すなわちリーマン多様体 $(M, g(t))$ を考える．リッチフローの式

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric.$$

(M, g_0) の g_0 を定数倍しても Ric は不変．さらに曲率 K_σ が一定 $=\ K$ ならば $Ric = (n-1)Kg_0$ すると,$g(t) = f(t)g_0, f(t) > 0$ のとき

$$g(t) = (1 - 2K(n-1)t)g_0$$

となる．t を大きくする $1 - 2K(n-1)t = 0$ となる t がある．すなわち M は 1 点だと思える.

コンパクト多様体上のリッチフロー

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = \frac{2}{n}rg_{ij}(t) - 2Ric_{ij}$$

$$r := \frac{1}{Vol(M)} \int_M Scal(p) dvol.$$

参考文献

基礎微分幾何，塩谷隆，サイエンス社

LECTURES ON THE RICCI FLOW, Peter Topping,

THREE MANIFOLDS WITH POSITIVE RICCI CURVATUR,RICHARD S. HAMILTON,J.DIFF.GEO,17(1982)255-306

Diffeology

泉田信行　九州大学大学院数理学府修士１年

学部の頃は、「１」を読んで、de Rham 理論を勉強し、今は diffeology を勉強しています。diffeology とは、Chen が、loop 空間上に de Rham 理論を拡張するために考えたものです。

<u>定義</u>　ユークリッド空間の開集合を domain という。
X を集合とする。
domain から X への写像を、X の parametrization という。

<u>定義</u>　X を集合とする。
X の parametrization の集合　$\mathcal{D}$ が X の diffeology である

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ D1)　$\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$

$$(\ c(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow X \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}^n, c(x)(s) = x\ ) \in \mathcal{D}$$

D2)　$P\colon U \longrightarrow X$　parametrization に対し、

「$\forall s \in U,\ \exists V\colon s$の開近傍、s, t, $\mathrm{P}|_V \in \mathcal{D}$」 $\Rightarrow \mathrm{P} \in \mathcal{D}$

D3)　$\forall (P\colon U \longrightarrow X) \in \mathcal{D},\ \forall\, W\colon \mathrm{domain},\ \forall \mathrm{F} \in C^\infty(W, U),\ P \circ F \in \mathcal{D}$

をみたす。

今後は、diffeological space 上に定義した微分形式を用いて、de Rham 理論を、diffeological space 上で再構築したいと思っています。

参考文献

「１」R.Bott　L.W.Tu　三村護訳　微分形式と代数トポロジー　シュプリンガージャパン

「２」Patric Iglesias　Diffeology

今研究していること

高知大学大学院 総合人間自然科学研究科
理学専攻 数学コース 修士 1 年
柏木智希

私はスペクトラムのなす安定ホモトピー圏について研究したいと思い今は [1] の論文を読んでいます. 現在は $K(n)$ の Bousfield class の最小性を証明しています.

今後は [1] をもとに chromatic splitting cojecture について研究を進めて, K(n)-local spectra のなす安定ホモトピー圏を考えることによって, スペクトラムのなす安定ホモトピー圏を推測していきたいと考えています.

参考文献

[1] Mark Hovey, *Bousfield Localization Functors and Hopkins' Chromatic Splitting Conjecture*, The Čech centennial (Boston, MA, 1993), 225-250, Contemp. Math., 181, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995

[2] D. Ravnel, *localization with respect to certain periodic homology theories*, Amer. J. Math. 106, 1984

[3] D. Ravnel, *Nilpotence and Periodicity in stable Homotopy Theory*, Princeton, 1992

[4] E. Devinatz, M. Hopkins, and J. Smith, *Nilpotence and stable homotopy theory I*, Ann. of Math. 128, 1988

[5] M. Hopkins, and J. Smith, *Nilpotence and stable homotopy theory II*, Ann. of Math. (2) 148 , no. 1, 1-49, 1998

今取り組んでいること

川元 祐奈

高知大学総合人間自然科学研究科 理学専攻 数学コース

私は学部生のときに数学主専攻ではなく情報専攻にいったため、数学コースの授業でとっていない授業がいくつかある。私の研究テーマである『May スペクトル系列と Adams スペクトル系列』を研究するにあたり、まずは幾何学という授業の理解に励んでいる。

幾何学の内容では、five lemma や snake lemma など Diagram Chasing による証明を勉強している。

最終的には、幾何学で理解した内容を使って『May スペクトル系列と Adams スペクトル系列』を理解し研究を進めていきたいと思う。

ハミルトン微分同相群とその上のカラビ擬準同型の応用

川崎盛通

2012 年 8 月 9 日

ここでは入門的内容の概要のみを書き、具体的な中身は本番で話す。

シンプレクティック多様体(M,Ω) に対し,$M\times[0,1]$ 上の C^∞ 級函数 $F: M\times[0,1]\to\mathbf{R}$ を考える。また、$F_t(x) := F(x,t)$ のように書いて、F_t を M 上の函数とみなす。

M 上の函数 G に対する**ハミルトン・ベクトル場**を X_G と記すとすると、$X_(F_t)(a\in[0,1])$ を M 上の時間変化するベクトル場とみなせる。これによるフローを**ハミルトン・フロー**と呼ぶ。

さて、M 上の微分同相写像 $f: M\to M$ が**ハミルトン微分同相写像**であるとは、恒等写像とハミルトン・フローで結べることである。

このハミルトン微分同相写像には以下の基本的な性質がある。

：ハミルトン微分同相写像の集合は、写像の合成に関して群をなす。この群をハミルトン微分同相群という。これは定義からは非自明な主張である。この群を $\mathrm{Ham}(M,\Omega)$ と書く。

：ハミルトン微分同相写像はシンプレクティック構造を保つ。

：ハミルトン微分同相群に対しリー群のアナロジーを適用した場合に、リー環は元の多様体上の正規化された函数全体となる。

これによりハミルトン微分同相群、更にそれを包含するシンプレクティック微分同相群 (シンプレクティック構造を保つ微分同相写像の成す群) が「無限次元の空間」であることが直感的に納得できる。

また、シンプレクティック多様体、ハミルトン微分同相写像については物理学的背景が存在する。

さて、私の専門は上のハミルトン微分同相群である。これを研究するために主に大きな道具を用いようと考えている。

1 つは**ホーファー距離**というハミルトン微分同相群に入る自然な計量である。もう 1 つは**カラビ擬準同型**という $\mathrm{Ham}(M,\Omega)$ もしくはその普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{Ham}}(M,\Omega)$ から実数 $\mathbf{R}$ への写像である。また、カラビ擬準同型の亜種として、擬状態という概念もこちらも盛んに研究されている。

この二つについて大雑把に説明すると、前者は $\mathrm{Ham}(M,\Omega)$ の幾何学的性質を記述するものであり、後者は代数的性質を反映するものといえる。とは言っても、実際には想像を超える様々な応用の仕方があり (特にカラビ擬準同型)、非常に面白い数学的対象である。

参考文献：L. Polterovich, *The geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2001.

[EP03]: M. Entov and L. Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology.* Internat. Math. Res. Notices **2003**(30)(2003), 1635-1676.

3 次元多様体論

岸本　昌幸
高知大学大学院 総合人間自然科学研究科
理学専攻 理学コース 数学分野 修士課程 1 年

私は同志社大学の代数学研究室で [1] を読み，”実 2 次体のオーダーに於ける基本単数の構成”について学びました．一方で低次元の位相幾何学について興味を持っていたので，高知大学大学院では 3 次元多様体論について [2] を読み，組合せ構造の側面から勉強しています．今は Heegaad 分解について勉強しています．位相幾何学を本格的に勉強し始めたのは大学院からということもあり，今は基礎知識をしっかり習得し，将来的に幅広い分野を理解するための素養を得たいと考えています．

今回のセミナーではトポロジーの周辺知識を勉強させていただき，これから勉強する上で参考にさせていただきたいと考えています．

参考文献

[1] 西沢清子・関口晃司・吉野邦生，『フラクタルと数の世界』，海文堂，1991 年
[2] 森元勘治，『3 次元多様体入門』，培風館，1996 年

L-S CATEGORY について

小林竜馬
東京理科大学理工学研究科数学専攻 博士後期課程一年

L-S category は，1934 年に L. Lusternik と L. Schnirelmann により定義されたホモトピー不変量である．L-S category はもともと，多様体上の実関数の臨界点の個数の下界を与える量として研究されていたが，その後，様々なタイプの L-S category が定義され，今日では幅広く研究されるようになった．ここでは，ベクトル束の L-S category について簡単に解説する．

ベクトル束の L-S category の概念は，I.M. James により [1] で導入された．初めに，ベクトル束 (の同型類) の L-S category の定義を述べる．

Definition 0.1. *([1]) 空間 X 上のベクトル束 (の同型類) ξ に対して，底空間 X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，ξ の各 U_λ への制限 $\xi|_{U_\lambda}$ が (束として) 自明となる被覆を考える．このとき，ξ の L-S category* $\mathrm{vecat}\,\xi$ *を，そのような被覆の最少数 (濃度) により定義する．*

Remark 0.2. $\mathrm{vecat}\,\xi = 1$ であるというのは ξ が自明束であることと同値である．底空間 X が有限次元 CW 複体のとき，X 上の任意のベクトル束 ξ に対して，$\mathrm{vecat}\,\xi$ の値は有限となる．また，このとき，ベクトル束の *L-S category* の定義において,「開被覆」の代わりに「閉被覆」を用いても，$\mathrm{vecat}\,\xi$ の値は変わらない．

次に，ベクトル束の安定類の L-S category について紹介する．

Definition 0.3. *空間 X 上のベクトル束 (の同型類) ξ に対して，ξ の安定類の L-S category* $\mathrm{vecat}_\mathrm{s}\,\xi$ *を，*$\mathrm{vecat}\,\eta$ *たちの最少数により定義する．ここに，η は ξ と安定同値なベクトル束である．*

Proposition 0.4. *空間 X 上のベクトル束 (の同型類) ξ に対して，底空間 X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，ξ の各 U_λ への制限 $\xi|_{U_\lambda}$ が (束として) 安定自明となる被覆を考える．このとき，ξ の安定類の L-S category* $\mathrm{vecat}_\mathrm{s}\,\xi$ *は，そのような被覆の最少数 (濃度) と一致する．*

Example 0.5. *自然数 $n \neq 1, 3, 7$ に対して，n 次元球面 S^n 上の接束 τ を考える．このとき，*$\mathrm{vecat}\,\tau = 2$ *だが，*$\mathrm{vecat}_\mathrm{s}\,\tau = 1$ *である．*

References

[1] I.M. James, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, Topology 17 (1978) 331-348.

e-mail address : kobayashi_ryoma@ma.noda.tus.ac.jp.

C^* 環の K 理論と位相的 K 理論

松岡勇気
名古屋大学多元数理科学研究科

平成 24 年 8 月 16 日

概 要

まず C^* 環の定義からはじめ, 作用素環論の基本的な結果である Gelfand-Naimark の定理を解説する. これは非可換幾何を考える一つの動機を与えるものでもある. その後 C^* 環の K 理論を導入し, 位相的 K 理論との関係について述べる.

1 C^* 環と Gelfand-Naimark の定理

定義 1.1. Banach 空間 A に対して多元環の構造が入っており, ノルムに関して $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $(\forall a, b \in A)$ 満たすものを **Banach 環**という.
また, Banach 環 A に対して対合 $*$ が定まり $\|a\| = \|a^*\|$ が任意の $a \in A$ に対して成り立つとき A を **Banach $*$ 環**といい, Banach $*$ 環でノルムが条件

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

を満たすものを C^* **環**という. (上の条件を C^*-identity という)

例 1.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ は, 行列の演算と, 随伴行列をとる操作を対合とすることにより C^* 環となる.
特に複素数体 $\mathbb{C}$ は C^* 環である.

例 1.3. X をコンパクト Hausdorff 空間としたとき, $C(X)$ で X 上の複素数値連続関数全体を表す. $f \in C(X)$ に対してノルムを $\|f\| = \sup_{x \in X} f(x)$ で定義すると $C(X)$ は Banach 空間になり, 各点で定まる演算により $C(X)$ は Banach 環となる. 更に対合 $*$ を $f^* = {}^t\bar{f}$ で定めることができて, $C(X)$ は C^* 環となる.
$C(X)$ は定数関数 1 を単位元に持つ可換な C^* 環である.

逆に単位元を持つ可換な C^* 環はコンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数環と同型となる．これが以下に解説する Gelfand-Naimark の定理である

定義 1.4. A を単位元を持つ C^* 環とする．このとき

$$\hat{A} := \{\varphi : A \longmapsto \mathbb{C} \mid \varphi \text{ は単位元を単位元に写す} * \text{準同型} \}$$

を A の **character space** といい, φ を A の **character** という.
また A の character φ に対して $\hat{a} : \hat{A} \longmapsto \mathbb{C}$ を

$$\hat{a}(\varphi) := \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \hat{A}$$

で定義し, 対応 $a \longmapsto \hat{a}$ を a の **Gelfand transform** という.

A は弱 $*$ 位相によりコンパクト Hausdorff 空間となり, 従って Gelfand transform は A から $C(\hat{A})$ への写像となる.

定理 1.5. Gelfand-Naimark A を単位元を持つ可換な C^* 環とする．このとき Gelfand transform $\Gamma : A \longmapsto C(\hat{A})$, $a \longmapsto \hat{a}$ は等距離 $*$ 同型

上の定理から次の結果が得られる.

定理 1.6. *単位元を持つ可換な C^* 環と単位元を保つ $*$ 準同型のなす圏は, コンパクト Hausdorff 空間と連続写像のなす圏と反変同値である.*

この意味で単位元を持つ可換な C^* 環を研究することはコンパクト Hausdorff 空間を研究することだといえる．では C^* 環を非可換なものにすればどうなるか．これが非可換幾何を考える一つの動機となる.

2 C^* 環の K 理論

C^* 環の K 理論についての概略と位相的 K 理論との関係について述べる.

定義 2.1. A を C^* 環とするとき,

$$p \in A \text{ が } \textbf{projection} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} p^2 = p = p^*$$

$$\mathcal{P}(A) := \{p \in A \mid \text{P は projection}\}$$

と定義する.

A を C^* 環としたとき

$$M_n(A) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : n \times n \text{ 行列} \;\middle|\; a_{i,j} \in A \quad (i, j = 1, \cdots, n) \right\}$$

に対して通常の行列と同じように演算を定義すれば, これは適当なノルムにより C^* 環となる. また,

$$\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

とかく.

定義 2.2. A を C^* 環としたとき,

$$\mathcal{P}_n(A) := \mathcal{P}(M_n(A))$$

$$\mathcal{P}_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

と定義する.

ここで $\mathcal{P}_\infty(A)$ に対して

$$\begin{aligned} p \oplus q &:= \mathrm{diag}(p, q) \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすれば, これにより $\mathcal{P}_\infty(A)$ には“ 加法 ”が定まる.

また, $p \in \mathcal{P}_n(A)$, $q \in \mathcal{P}_m(A)$ に対して

$$p \sim q \underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists v \in M_{m,n}(A) \;\; \text{s.t. } p = v^* v \;,\; q = v v^*$$

で $\mathcal{P}(A)$ に同値関係を定義して,

$$V(A) := \mathcal{P}_\infty(A)/\sim$$

とすれば, $\mathcal{P}_\infty(A)$ 上の加法により自然に $V(A)$ に加法を定めることができて, $V(A)$ は可換半群となる.

定義 2.3. A を単位元持つ C^* 環としたとき, A の K_0 **群**を

$$K_0(A) := G(V(A))$$

と定義する. ここで G は Grothendieck construction を表す.

以上が C^* 環の K_0 群の定義であるが, 一方で位相的 K 理論によりコンパクト Hausdorff 空間に対しても K^0 群が定義される.

さて, Gelfand-Naimark の定理によれば, 単位元を持つ可換 C^* 環とコンパクト Hausdorff 空間は同型を除いて一対一に対応している. では C^* 環の K 理論と位相的 K 理論についてはどのような関係が成り立っているのか. 実は次の定理が成立する.

定理 2.4. X をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき次が成立.

$$K_0(C(X)) \simeq K^0(X)$$

この定理から単位元を持つ可換 C^* 環の K 理論は, 位相的な K 理論を包含しているともいえる. 一方で C^* 環の K 理論は非可換な C^* 環にも定義される. これは C^* 環の K 理論が非可換幾何を研究する道具となることを示唆している.

参考文献

[1] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 1986.

[2] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-Homology*. Oxford University Press, 2000.

[3] 夏目利一, 森吉仁志, **作用素環と幾何学**. 日本数学会, 2001.

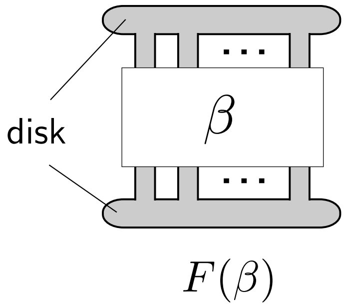
[4] M. Rørdam, F. Larsen, and N.J.Laustsen, *An Introduction to K-theory for C^*-algebras*. Cambridge University Press, 2000.

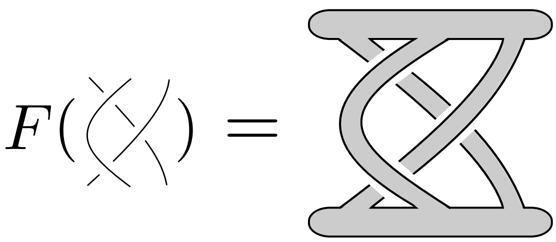
[5] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*. Oxford University Press, 1993.

絡み目の flat braidzel index と flat braidzel length

三浦　嵩広
神戸大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期課程２年

２枚の disk の境界にいくつかの flat band（すなわち，ねじれのない band）の両端を，図のように貼り付ける．このとき，各 band の中心線の集まりが１つの braid β を表すようにする．こうしてできる曲面を **flat braidzel 曲面**といい $F(\beta)$ で表す．flat braidzel 曲面は境界をもち，また，連結でコンパクトな向き付け可能曲面であるので，ある絡み目の Seifert 曲面とみなすことができる．





Q. どのような絡み目が Seifert 曲面として flat braidzel 曲面をもつか？

A. どの絡み目ももつ．すなわち，次が成り立つ．

定理 [2]　任意の絡み目は Seifert 曲面として（無限個の）flat braidzel 曲面をもつ．

素朴な疑問として次のことが気になる．

Q. 与えられた絡み目を flat braidzel 曲面の境界として表すために必要な band の最小本数は？
　また，band の最小交差数は？

この問題を考えるために，絡み目 L に対して次の２つの絡み目不変量を定義する．

定義　$n_{fb}(L) = \min\{n(\beta) | \beta : \text{braid}, F(\beta)$ は L の flat braidzel 曲面 $\}$.
$l_{fb}(L) = \min\{l(\beta) | \beta : \text{braid}, F(\beta)$ は L の flat braidzel 曲面 $\}$.

ここで $n(\beta)$ は braid β の string の数，$l(\beta)$ は braid β の length を表す．
$n_{fb}(L)$，$l_{fb}(L)$ をそれぞれ絡み目 L の **flat braidzel index**，**flat braidzel length** という．

すなわち，絡み目 L の flat braidzel index が L を flat braidzel 曲面の境界として表すために必要な band の最小本数を表し，flat braidzel length が band の最小交差数を表している．“ とり得る値の最小値 ” として定義されている不変量に下からの評価を与えることは，一般に難しい．これらの絡み目不変量に対し，これまでに次のような評価が与えられている．

命題 (1) $n_{fb}(L) \geqq 2d(L) + r - 2$.
(2) $l_{fb}(L) \geqq \mathrm{maxdeg}\nabla_L(z)$.

ただし r は L の結び目成分数，$\nabla_L(z)$ は L の Conway 多項式を表す.
また，L の結び目成分 $K_i(i = 1, 2, \ldots, r)$ に対し $d(L) = \#\{i|\mathrm{lk}(K_i, L \setminus K_i) \equiv 1 \pmod 2\}/2$ とする.

この命題からいくつかの絡み目族に対しては flat braidzel index，flat braidzel length が決定できる（事実）. しかし，そのほかのほとんどの絡み目に対してはまだ決定できていない.

事実 任意の自然数 m に対して次が成り立つ.
(1) $n_{fb}(\coprod_m H) = 4m - 2$.
(2) $l_{fb}(T_{2,2m+1} \# \overline{T_{2,2m+1}}) = 4m$.

ここで H は正または負の Hopf 絡み目，$T_{p,q}$ は (p, q)-トーラス結び目，$\overline{L}$ は絡み目 L の鏡像を表す.

参考文献

[1] 河内明夫：レクチャー結び目理論，共立出版 (2007)
[2] T. Miura, *On flat braidzel surfaces for links*, Topology Appl. **159** (2012), 623–632.
[3] T. Nakamura, *Notes on braidzel surfaces for links*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**(2) (2007), 559–567.

量子不変量の概略

望月 厚志

京都大学大学院数理解析系

量子不変量，特に knot の isotopy 不変量に関するものを，[1] の参考文献を中心に概観したい．

初めに量子群から得られる不変量を考える．G をある Lie 群としたときに，G 上の関数全体 $\mathrm{Fun}(G)$ には自然な可換環の構造が定まると同時に，G の群構造を反映した“ 余代数 ”が定まる．更に関数環 $\mathrm{Fun}(G)$ とある種の双対をなすものとして，対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ が存在する．これらの双代数（代数と余代数を合わせた構造）はそれぞれ“ 余可換でないが可換である ”,“ 可換でないが余可換である ”というように，ある種の対称性を保持したものである．しかし普遍包絡環の $q = e^{\hbar}$（$\hbar$：Planck 定数）による q-analog（量子化）を考えることによって,“ 可換でなく余可換でもない ”双代数の構造が得られるようになる．これを「量子化された Lie 群」の意味で「量子群」と呼ぶ．

通常、量子群は双代数として ribbon Hopf 代数の構造をもつ．有向 knot を平面に射影して得られる diagram に対し，ribbon Hopf 代数の元を labelling する.（この labelling は基本 diagram に対する対応関係として定め，diagram を基本 diagram に分解することにより得られる.）ここで labelling された ribon Hopf 代数の元を diagram の向き付けと逆向きに積をとることにより，diagram の不変量，更には有向 knot の不変量が得られる．これを ribbon Hopf 代数（すなわち量子群）が由来する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $Q^{g;*}(K)$ と書いて量子 $(\mathfrak{g};*)$ 不変量（あるいは普遍 $\mathfrak{g}$ 不変量）と呼ぶ．

一方で Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V を考えると，成分入れ換え写像 $P : V \otimes V \to V \otimes V$, $P(x \otimes y) = y \otimes x$ は $\mathfrak{g}$ の作用に関する intertwiner であると同時に，$U(\mathfrak{g})$ の作用に関する intertwiner でもある．この intertwiner を parameter q で変形することにより，$\hbar \to 0$ の古典極限で P と一致するような非自明な intertwiner $R : V \otimes V \to V \otimes V$ が得られる．このとき R は Yang-Baxter 方程式の解となる.（すなわち R を knot の交点に対応させると，R は knot の Reidemeister Ⅲ 移動に対して不変である.）このような R は ribbon Hopf 代数の元である普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ と ribbon Hopf 代数の表現から得られることが知られている．R に加えて，同じく ribbon Hopf 代数の元より得られる h を用いて，特定の写像を knot を slice したときの基本 diagram に対応させる.（より正確には sliced diagram を区切る水平線上に張り付いた表現から表現への intertwiner として対応させる.）ここで有向 knot の各々の基本 diagram に貼り付いた intertwiner

を写像の合成により積をとることにより，diagram の不変量，更には有向 knot の不変量が得られる．これを Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその表現 V に対して $Q^{g;V}(K)$ と書いて量子 $(\mathfrak{g};V)$ 不変量（あるいは作用素不変量）と呼ぶ.

更に表現から定まる ribbon Hopf 代数と $\mathbf{C}$ の間に定まる線形写像（量子 trace という）により，量子 $(\mathfrak{g};*)$ 不変量から量子 $(\mathfrak{g};V)$ 不変量が得られる．よって Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を定めるごとに量子 $(\mathfrak{g};*)$ 不変量が決まり，$\mathfrak{g}$ の表現 V を定めるごとに量子 $(\mathfrak{g};V)$ 不変量が決まることが分かる．量子群を考えることにより，Lie 代数とその表現の個数と同じだけの莫大な数の不変量が得られたことになる.

続いて共形場理論に由来する KZ 方程式を考える．KZ 方程式は WZW 模型の相関関数が満たす微分方程式として得られる．これは配置空間 X_n と Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 V に対し，共形場理論において粒子の相互作用を表す相関関数 $W : X_n \to V^{\otimes n}$ の全微分方程式 $dW = \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} \tau_{ij} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} W$ として表される．ここで τ_{ij} は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に由来する量である.（$U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ の元である Killing 形式の双対元を，$U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ の第 i 成分，第 j 成分に対応させたものである.）この τ_{ij} はある種の braid 関係式のような積の交換に関する性質をもち，これにより KZ 方程式が可積分条件を満たすことが示される．よって配置空間 X_n の任意の点の近傍において任意に与えられた初期値を持つような一意的な局所解が存在する．X_n 上の任意の loop に沿った局所解の貼り合わせにより $V^{\otimes n}$ における loop の持ち上げが得られる．配置空間の対称群の作用に関する商空間を考えて，そこにおける loop を braid 群の元と同一視することにより，braid 群の monodromy 表現 $\rho_{\mathrm{KZ}} : B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ が得られる.

以上のようにして共形場理論に基づいた KZ 方程式から monodromy 表現を得ることができるが，一般に準三角準双代数という代数構造をもつ代数とその表現からも braid 群の表現を導けることが知られている．これにより量子群からも braid 群の表現として $\rho_{\mathcal{R}} : B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ が得られる．このとき上記の 2 つの braid 群の表現は，同一の Lie 代数の表現 $V^{\otimes n}$（の冪級数環）の自己同型による共役により結び付けられる.（この事実を河野-Drinfel'd の定理という.）量子群の世界と共形場理論の世界を橋渡しするものとして，上記の事実を捉えることができる.

しかし上記の monodromy 表現はいずれも Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に依存している．ここで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に代わるものとして n 個の区間上の Jacobi diagram の空間 $\mathcal{A}(\downarrow\downarrow\cdots\downarrow)$ を持ち出す．KZ 方程式の解を $W : X_n \to \mathcal{A}(\downarrow\downarrow\cdots\downarrow)$ と置き換えることで，形式的 KZ 方程式（あるいは普遍 KZ 方程式）と呼ばれる全微分方程式 $dW = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i<j} \tau_{ij} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} W$ を考えることができる．形式的 KZ 方程式の解に沿った配置空間の loop の持ち上げを反復積分により表すことで，KZ 方程式の場合と同様に braid 群の monodromy 表現を作ることができる.（これは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に依存しない.）更に braid に対する反復積分を knot にまで拡張する形で，S^1 上の Jacobi diagram の空間 $\mathcal{A}(S^1)$（実際には chord diagram）に値をもつ knot の isotopy 不変量を作ることができる．これを $Z(K)$ と書いて Kontsevich 不変量（あるいは普遍量子不変量）と呼ぶ．このようにして Lie 代数由来の τ_{ij} を n 個の区間上の Jacobi diagram に置き換えることにより，Lie 代数によ

らない不変量が得られる．実は河野-Drinfel'd の定理により，Kontsevich 不変量が量子不変量の間で univesality をもつことが示せ，Kontsevich 不変量から量子不変量を再現することができる．

更に上記の 2 つの不変量とは別に，knot の交点の特異点としての情報を考えることで，$v : \{\text{knot}\} \to \mathbf{C}$ なる写像からも knot の isotopy 不変量が得られることが知られている．これを $v(K)$ と書いて Vassiliev 不変量（あるいは有限型不変量）と呼ぶ.（より正確には S^3 上の有向 knot の isotopy 類によって自由に張られる $\mathbf{C}$ 上の vector 空間 $\mathcal{K}$ および d 個の 2 重点をもつ特異 knot によって張られる $\mathcal{K}$ の部分 vector 空間 $\mathcal{K}_d$ に対し，線形写像 $v : \mathcal{K} \to \mathbf{C}$ が $v|_{\mathcal{K}_{d+1}} = 0$ となるとき，これを次元 d の Vassiliev 不変量と呼ぶ.）S^1 上の Jacobi diagram（実際には chord diagram）の空間と knot の張る vector 空間 $\mathcal{K}$ の間に対応関係をみることができ，これにより Kontsvich 不変量が Vassiliev 不変量の間でも universality をもつことが示せる．加えて，量子不変量 $Q^{g;V}(K)|_{q=e^\hbar}$ における $\hbar^d$ の係数から次元 d の Vassilev 不変量が得られるという意味で，量子不変量と Vassiliev 不変量が同等であることも示せる．

量子群, 共形場理論, 特異点理論といった異なる背景からそれぞれ量子不変量, Kontsevich 不変量，Vassiliev 不変量という knot の不変量が導かれ，Kontsevich 不変量の universality を通じてこれらが統一的に捉えられることが分かる．

議論として不十分，不正確な箇所はあるが，以上が knot の不変量としての量子不変量の概略となる．

参考文献

[1] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants : A Study of Knots, 3-Manifolds, and Their Sets.* World Scientific 2002

[2] 神保道夫，量子群とヤン・バクスター方程式．シュプリンガー・フェアラーク東京 1990

[3] C. Kassel, *Quantum Groups.* Springer 1995

[4] 大槻知忠，量子不変量ー3 次元トポロジーと数理物理の遭遇．日本評論社 1999

[5] 河野俊丈，場の理論とトポロジー．岩波講座 現代数学の展開 1998

[6] 河野俊丈，反復積分の幾何学．シュプリンガージャパン 2009

絡み数と平方剰余記号について

新甫　洋史
九州大学数理学府修士一年

Arithmetic Topology について

数論的位相幾何学について簡単に解説する．数論的位相幾何学とは 3 次元トポロジーと数論の類似を追求する分野である．類似の根拠など詳しくは [森下], [Mo] を参考にして頂きたい．ここでは簡単な類似の対応を紹介する．

代数体の整数環 $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_k$	$\Longleftrightarrow$	連結で向き付け可能な閉 3 次元多様体 M
素イデアル	$\Longleftrightarrow$	結び目
素イデアルの集まり	$\Longleftrightarrow$	絡み目
イデアル類群	$\Longleftrightarrow$	1 次ホモロジー群
単数群	$\Longleftrightarrow$	2 次ホモロジー群
平方剰余記号	$\Longleftrightarrow$	絡み数
平方剰余の相互法則 $(\frac{p}{q}) = (\frac{q}{p})$ (p or $q \equiv 1 \bmod 4$)	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{lk}(L,K) = \mathrm{lk}(K,L)$

注意 1：代数体とは $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体のこと．整数環は $\{a \in k | \ \exists\, f(\mathrm{X}) \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]\ f(\mathrm{X})\mathrm{:monic}\ ,\ f(a) = 0\ \}$.
注意 2：イデアル類群は代数体の整数環の分数イデアルからなる群を単項イデアルのなす群で割ったもの．

絡み数と平方剰余記号について

絡み数

$K \cup L \subset S^3$ 2 成分絡み目, $X_L = S^3 \backslash \mathrm{int}(V_L)$[1], $\pi_1(X_L) = G_L$ とする．

$\psi_\infty : G_L \to \mathbb{Z}$ を各メリディアンを 1 に送る写像とする．$\mathrm{Ker}(\psi_\infty)$ に対応する X_L の無限巡回被覆を X_∞ とし，$1 \in \mathbb{Z}$ に対応する $\mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$ の生成元を τ とする．

$\rho_\infty : G_L \to \mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$ を自然な準同型とする．即ち, G_L の起点 $x \in X_L$ を取り, $y \in \rho_\infty^{-1}(x)$ を一つ取ると $[l] \in G_L$ に対して, $y.[l] \in \rho_\infty^{-1}(x)$ が y を始点とする l の持ち上げの終点として定まる．そこで, $\sigma \in \mathrm{Gal}(X_\infty/X_L)$ で, $\sigma(y) = y.[l] \in \rho_\infty^{-1}(x)$ となるような σ が唯一つ取れるので（Galois 被覆の定義）それを対応させている．

命題． ρ_∞ による $[K]$ の像は $\tau^{\mathrm{lk}(L,K)}$ である．

ψ_∞ と自然な準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ との合成を ψ_2 として, $\mathrm{Ker}(\psi_2)$ に対応する X_L の 2 次被覆を $h_2 : X_2 \to X_L$ とし, $\rho_2 : G_L \to \mathrm{Gal}(X_2/X_L)$ を自然な準同型とする．この時上の命題より次が従う．

系． $\rho_2 : G_L \to \mathrm{Gal}(X_2/X_L) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ における $[K]$ の像は $\mathrm{lk}(L,K) \bmod 2$ である．

この事実を用いて 2 つの素数の mod 2 の絡み数を定義しよう．

平方剰余記号

まず平方剰余記号について簡単に説明する．p を奇素数とする．

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (x^2 \equiv a \mod p \text{ となる } x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ が存在する}) \\ -1 & (x^2 \equiv a \mod p \text{ となる } x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ が存在しない}) \end{cases}$$

特に有名な事実として次が成立する．

[1] V_L は L の管状近傍を表す

定理. $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

特に p or $q \equiv 1 \bmod 4$ の時は次が成立する.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

さて, p, q を奇素数とする. $X_q = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\backslash q = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{q}])$, $G_q = \pi_1(X_q)$ とする. α を mod q の原始根とし, $\psi_2 : G_q^{ab} = \mathbb{Z}_q^\times = \mathbb{F}_q^\times \times (1 + q\mathbb{Z}_q) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を $\psi_2(\alpha) = 1, \psi_2(1 + \mathbb{Z}_q) = 0$ を満たす全射準同型とする.

$\mathrm{Ker}(\psi_2)$ に対応する $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体を k とする. 具体的には $q^* = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q$ とした時, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{q^*})$ となっている. これは q のみが分岐する $\mathbb{Q}$ の唯一つの 2 次拡大体である.

さて, X_q の 2 次エタール被覆を $X_2 = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{q^*}}{2}][\frac{1}{q}]$ とし, 自然な準同型 $\rho_2 : G_q \to \mathrm{Gal}(X_2/X_q) = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を用いて, p, q の mod2 の絡み数を ρ_2 における p 上の Frobenius 自己同型 $\sigma_p \in G_q$ の像として定義する. つまり, $\rho_2(\sigma_p) = \mathrm{lk}_2(q, p)$ である.

これだけだと計算しづらくよく分からないかもしれないが, 次の定理がある.

定理. $(-1)^{\mathrm{lk}_2(q,p)} = \left(\frac{q^*}{p}\right)$

これで具体的には 5 と 13 などで, lk(5,13) $\equiv 1 \bmod 2$ であることが分かる.

今後の展望

最近は 2 成分絡み目の 2 次の分岐被覆について具体的に考えている.

その他に大域類体論の幾何版があると考えられているので, そちらの方も興味を持っている. [Si]

参考文献

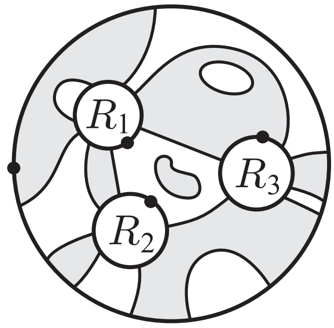
[森下] 森下昌紀, 結び目と素数, Contemporary Mathematics, Springer-Verlag, 2008

[Mo] M.Morishita, On certain analogies between knots and primes, J. Reine Angew. Math.,550:141-167,2002.

[Si] A.Sikora, 研究集会 (Low dimention topology and number theory III, March,2011, Fukuoka) の講演資料

平面代数とその低次元トポロジーへの応用について

京都大学数理解析研究所 D3　岡崎建太



平面代数（planar algebra）とは 1999 年に Jones によって提示された概念で, おおまかに言えば, ラベル付けられた基点付きの円板を含む影付きタングル（平面タングルと呼ばれる．右図参照.）たちによって構成されるフィルター付き代数のことである．Jones は指数有限で II_1 型の部分因子環と, 平面代数で「よい条件」— 閉じたタングル全体のなすベクトル空間は 1 次元, かつ有限次元, “球面的”, “非退化”, “半単純” であること—を満たすものの間に対応関係があることを示した．これにより部分因子環の議論が, 平面代数の言葉だけで組み合わせ的に再構成できる可能性が生まれたのである．与えられた部分因子環に対応する平面代数を, 部分因子環の平面代数（subfactor planar algebra）という．続いて提唱されたのが, 次の **Kuperberg 問題**である．

> 部分因子環の平面代数について, 生成元と関係式を具体的に与え, それが実際に元の平面代数と一致していること, さらに上述の「よい条件」を満たしていることを平面代数の議論だけで証明せよ．

例えば A_n 型部分因子環の平面代数は Temperley-Lieb 代数であり, 対応する平面代数はラベルがついていない平面タングルたちによって構成されることがよく知られている．また, Morrison-Peters-Snyder は D_{2n} 型部分因子環の平面代数について, Kuperberg の問題に完全な回答を与えた．また、Bigelow は E_6,E_8 型部分因子環の平面代数について, その生成元と関係式を与え, さらにそのベクトル空間としての基底も決定した．しかし, 閉じたタングル全体のなすベクトル空間は 1 次元であることと, 非退化性, 及び半単純性の証明には作用素環論の分野で証明された『 E_6, E_8 型部分因子環は存在する』という事実を用いており, 完全に組み合わせ的ではなかった．

一方 II_1-部分因子環 $N \subset M$ が指数有限のとき, ここから導かれる $6j$-記号という量を用い, 三角形分割された 3 次元多様体の各 “状態” の “重み” を足し上げることにより, 三角形分割のとり方に寄らない 3 次元多様体の不変量を得ることができる．これを **状態和不変量** という．この不変量の構成には（当然ながら）作用素環の議論が必要となる．

主結果として, 次の 2 つを示すことができた．(a) E_6 及び E_8 型の場合の Kuperberg 問題の （A_n 型や D_{2n} 型と同様な）解決, 及びにこれを用いた (b) E_6, E_8 型状態和不変量の self-contained かつ組み合わせ的な再定義.

(a) について: 任意の閉じた平面タングルから (well-defined に) 複素数値を返すアルゴリズムを構成する．これにより閉じたタングル全体のなすベクトル空間の次元は 1 であることがわかる．また, 部分因子環（及び平面代数）の主要な構造を記述する主要グラフというものがあり, その vertex に乗るべき単純射影の式を平面代数の言葉で具体的に決定する．ここから非退性と半単純性が導かれる．

(b) について: 単体分割された有向 3 次元多様体と「よい条件」をみたす平面代数が与えられたとき, その辺に先ほどの単純射影を代入し, 点に単純射影の三つ組から構成されるベクトル空間の基底を代入することで各四面体の「重み」が定義できる（$6j$-記号と呼ばれる）．この代入の仕方（状態）すべてに渡ってこの「重み」の積を足し上げることで状態和不変量が構成できる．この方法は一般論としてすでに知られているが, 今回の構成では面の彩色に関して基底のとり方を工夫することにより特に対称性の高いものをとることができた.

HOPKINS' CHROMATIC SPLITTING CONJECTURE について

岡崎末希子
高知大学大学院総合人間自然科学研究科 M2

Definition 1.
スペクトラム X が $E \wedge X = 0$ を満たすとき, X を *E-acyclic* という.

Definition 2.
スペクトラム X が $C \wedge E = 0$ を満たす $^\forall C$ に対して $[C, X] = 0$ であるとき, X を *E-local* という.

Definition 3.
$f : X \to Y$ のコファイバーが *E-acyclic* であるとき, f を *E-equivalence* という.

Theorem 1. (Bousfield)
次を満たす *functor* $L_E : \mathcal{S} \to \mathcal{L}_E$ が存在する.

$$X \to Y : E\text{-}equivalence \Rightarrow L_E X = L_E Y$$

このとき, L_E を *E-localization functor* という.

Lemma 1.
E, F を $F \wedge L_E S^0 = 0$ を満たすスペクトラムとする.
$^\forall X$ に対して, *localization map* $L_{E \vee F} X \to L_F X$ のファイバーは, *function spectrum* $F(L_E S^0, L_{E \vee F} X)$ と同型である.

Proposition 1. (Chromatic Splitting Conjecture)

$$F(L_0 S^0, L_n S^0_p) = \bigvee_{i=1}^{3^{n-1}} \Sigma^{e_i} H\mathbb{Q}_p \quad (-n^2 - 1 \leq e_i \leq -2n)$$

特に, このウェッジ和には $\bigvee_{i=1}^{2^{n-1}} \Sigma^{-2n} H\mathbb{Q}_p$ が含まれている.

Example 1.
$n = 3$ のとき

$$F(L_0 S^0, L_3 S^0_p) = \bigvee_{i=1}^{4} \Sigma^{-6} H\mathbb{Q}_p \vee \bigvee_{i=1}^{3} \Sigma^{-7} H\mathbb{Q}_p \vee \Sigma^{-9} H\mathbb{Q}_p \vee \Sigma^{-10} H\mathbb{Q}_p$$

Theorem 2. (Hovey, Shimomura)

$$F(L_1 S^0, L_2 S^0_p) = \Sigma^{-2} L_1 S^0_p \vee \Sigma^{-4} L_0 S^0_p \vee \Sigma^{-5} L_0 S^0_p$$

References

[1] Mark Hovey, Bousfield Localization Functors and Hopkins' Chromatic Splitting Conjecture, A. M. S. Contemp. Math. 181 (1995), 225-250.

Applications of Morse Theory

東京大学大学院数理科学研究科 修士課程 1 年　折田 龍馬

2012 年 8 月 15 日

1　基本定理 [1]

Morse 理論においてベースとなるのは次の定理である。

Theorem 1.1 (Morse 理論の基本定理)
コンパクト多様体 M と、M 上の Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して、次のホモトピー同値が成立。

$$M \simeq (f \text{ の指数}\lambda\text{の各臨界点に対して、}\lambda\text{次元の胞体を 1 つ持つような CW複体})$$

2　道の空間の Morse 理論 [1]

Morse 理論の一つの重要な応用として、道の空間がある。

Definition 2.1 (道の空間)
Riemann 多様体 M と 2 点 $p, q \in M$ に対して、**道の空間** $\Omega(M; p, q)$ を、

$$\Omega(M; p, q) = \{M \text{ 内の } p \text{ から } q \text{ への区分的に } C^\infty \text{級な曲線全体}\}$$

と定義する。これはある種の無限次元多様体となっている。

道の空間 $\Omega(M; p, q)$ 上の関数としてエネルギー関数を考えると、臨界点は測地線となり、その退化性は Jacobi 場の存在性といった、Riemann 幾何の言葉に翻訳される。有限次元多様体の Morse 理論のアナロジーを追うことにより、次の定理を得る。

Theorem 2.2 (道の空間の Morse 理論の基本定理)
完備 Riemann 多様体 M と、どんな測地線に沿っても共役でない 2 点 $p, q \in M$ に対して、次のホモトピー同値が成立。

$$\Omega(M; p, q) \simeq (p \text{ から } q \text{ への指数}\lambda\text{の各測地線に対して、}\lambda\text{次元の胞体を 1 つ持つような可算 CW複体})$$

2.1　対称空間と Lie 群への応用

Theorem 2.3 (Bott 周期性)
ユニタリ群の安定ホモトピー群は周期 2 を持つ。

$$\pi_i U \cong \pi_{i+2} U$$

無限直交群のホモトピー群は周期 8 を持つ。

$$\pi_i O \cong \pi_{i+8} O$$

3 Morse ホモロジー [2]

一般に Morse 関数の gradient flow line は、指数の等しい臨界点同士を結ぶことがある。これを回避し Morse ホモロジーを定義するために、Morse 関数を少し修正した Morse-Smale 関数を用いる。

Definition 3.1 (Morse-Smale 関数)
M を Riemann 多様体とする。M 上の Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が **Morse-Smale 関数**であるとは、

$$\forall p, q \in \mathrm{Cr}(f), \quad W^u(q) \pitchfork W^s(p)$$

を満たすときをいう。
ここで $\mathrm{Cr}(f)$ は f の臨界点全体を、$W^s(p), W^u(q)$ はそれぞれ、p, q の安定多様体、不安定多様体を表す。

Kupka-Smale 定理により、Morse-Smale 関数は C^∞ 級関数の任意の摂動として得られることが分かる。また、横断正則性定理により、次を得る。

Proposition 3.2
M をコンパクト Riemann 多様体、$f : M \to \mathbb{R}$ を Morse-Smale 関数とする。

$$\forall p, q \in \mathrm{Cr}(f), \quad W^u(q) \cap W^s(p) \neq \emptyset$$

ならば、$W^u(q) \cap W^s(p)$ は M に埋め込まれた $(\lambda_q - \lambda_p)$ 次元部分多様体。
ここで、λ_p, λ_q は、それぞれ p, q の臨界点としての指数。

Remark 3.3
$W(q,p) := W^u(q) \cap W^s(p)$ とおく。この命題により、$\forall p, q \in \mathrm{Cr}(f)$, $W(q,p) \neq \emptyset$ ならば、

$$\dim W(q,p) = \lambda_q - \lambda_p \geq 1$$

なので、(負の) gradient flow line は必ず臨界点の指数が減る方向に存在することが分かる。

また、力学系における λ-Lemma の系として、次を得る。

Corollary 3.4
M, f は Proposition 3.2 と同じとする。$\lambda_q - \lambda_p = 1$ なる任意の臨界点 $p, q \in \mathrm{Cr}(f)$ に対して、q から p への gradient flow のモジュライ空間 $\mathcal{M}(q,p)$ は有限。

Definition 3.5 (Morse-Smale-Witten 鎖複体)
M を向き付けられたコンパクト Riemann 多様体、$f : M \to \mathbb{R}$ を Morse-Smale 関数とする。f の不安定多様体には向きが与えられているとする。

$$\mathrm{Cr}_k(f) := \{\text{ 指数 } k \text{ の臨界点全体 }\}$$

$$C_k(f) := (\text{指数 } k \text{ の臨界点から生成される自由 Abel 群})$$

$$C_*(f) := \bigoplus_{k=0}^{\dim M} C_k(f)$$

として、さらに準同型 $\partial_k : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ を、

$$\partial_k(q) = \sum_{p \in \mathrm{Cr}_{k-1}(f)} n(q,p)p$$

によって定義する。

ここで $n(q,p) \in \mathbb{Z}$ とは、

$$n(q,p) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(q,p)} \operatorname{sgn} \gamma$$

である。Corollary 3.4 により well-defined であることがわかる。

∂_* を **Morse-Smale-Witten 境界作用素**、$(C_*(f), \partial_*)$ を **Morse-Smale-Witten 鎖複体**という。

Theorem 3.6 (Morse ホモロジー定理)

$(C_*(f), \partial_*)$ は鎖複体で、そのホモロジー群は整係数特異ホモロジー群と同型。すなわち、

$$H_*(C_*(f), \partial_*) \cong H_*(M; \mathbb{Z})$$

3.1 複素 Grassmann 多様体への応用

複素 Grassmann 多様体 $G_{n,n+k}(\mathbb{C})$ 上に、特別な歪 Hermite 行列 $A \in \mathfrak{u}(n+k)$ に対して Morse-Smale 関数 $f_A : G_{n,n+k}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ を構成することができる。

Theorem 3.7 (複素 Grassmann 多様体のホモロジー)

$$H_j(G_{n,n+k}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } j : \text{odd} \\ \mathbb{Z}^{\bigoplus \tilde{r}(\frac{j}{2})} & \text{if } j : \text{even} \end{cases}$$

ここで $\tilde{r}(\frac{j}{2}) \in \mathbb{Z}$ とは、それぞれが k 以下であるような、高々 n 個の正の整数への $\frac{j}{2}$ の分割の個数。

この他に旗多様体やシンプレクティック幾何学への応用もある [3][4]。また、Floer ホモロジーは Morse ホモロジーの無限次元多様体への応用となっている。シンプレクティック Floer ホモロジーについては、[5] を読んでいる。

4 円値 Morse 理論 [6]

円値 Morse 理論では、その名の通り Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ の代わりに、円周に値を取る **Morse 写像** $f : M \to S^1$ を用いる。S^1 は局所的には $\mathbb{R}$ と同相なので、写像の局所的な性質である臨界点の退化性などはそのまま定義される。

参考文献

[1] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press

[2] A. Banyaga and D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers

[3] R. Bott, *Raoul Bott: Collected Papers Vol.1*, Birkhuser Boston Inc

[4] Ana Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Springer-Verlag

[5] D. Salamon, *Lectures on Floer homology*, Notes for lectures held at the IAS/Park City

[6] A. Pajitnov, *Circle-valued Morse Theory*, Walter De Gruyter Inc

一番熱い場所の漸近挙動

坂田繁洋*

概 要

熱方程式の初期値問題を考えます。その方程式が具体的に解けることは学部程度の微分積分でわかります。その解を、時間 t を固定して、$\mathbb{R}^m$ 上の関数と思うことにしましょう。その関数の最大点の漸近挙動に関して、幾何学的な結果が知られているので、その結果をいくつか述べます。

1 熱方程式の初期値問題と Hot spot

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を恒等的に 0 でない非負有界可測関数とする。また、f の台はコンパクトとする。初期値問題

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), & x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0, \\ \displaystyle\lim_{t \to +0} u(x,t) = f(x), & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

を考える。この方程式は、**熱方程式**とよばれている。物理的な意味は、

> 時刻 0 での温度分布が f で与えられている空間 $\mathbb{R}^m$ において、時刻 $t > 0$、場所 $x \in \mathbb{R}^m$ での温度は $u(x,t)$ で与えられる。

というものである。古典的にその解 $u(x,t) = Hf(x,t)$ は

$$Hf(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} \right) dy,\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0$$

と表わされることが知られている。ここで、t を一つ固定して、$\mathbb{R}^m$ 上の関数 $Hf(\cdot,t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を考える。このとき、冒頭で述べた f の仮定から次の命題が従う。

命題 1.1 ([CK]) $Hf(\cdot,t)$ を最大にするような点が存在して、それは必ず $\mathrm{supp}\, f$ の凸包に含まれる。

注意 1.2 一般に、集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ の凸包とは、X を含む (包含関係に関して) 最小の凸集合のことである。

定義 1.3 ([CK]) $Hf(\cdot,t)$ の最大点の集合を

$$\mathcal{H}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, Hf(x,t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^m} Hf(\xi,t) \right\}$$

とおき、$\mathrm{supp}\, f$ の (密度関数 f の) **Hot spot** とよぶ。

*首都大学東京理工学研究科 (sakata-shigehiro@ed.tmu.ac.jp)

2 Hot spot の漸近挙動

Hot spot の情報を調べるために、関数 $Hf(\cdot,t)$ の臨界点 (微分の零点) を考察する。

$$\frac{\partial Hf}{\partial x_j}(x,t) = -\frac{1}{2t\,(4\pi t)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,(x_j - y_j)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy$$

であるから

$$\operatorname{grad}_x Hf(x,t) = 0 \iff \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,(x-y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dy = 0$$

である。$t \to +\infty$ とすると、右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,(x-y)\,dy = 0 \iff x = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(y)y\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(y)dy}$$

となる。 これは密度が f で与えられたコンパクト集合 $\operatorname{supp} f$ の重心座標 (重みの平均) である。よって、($t \to +\infty$ の極限が本当にあるのかどうかをキチンと調べてから) 次の定理が得られる。

定理 2.1 ([CK]) Hot spot は $\operatorname{supp} f$ の重心 (の一点集合) に (Hausdoff distance の意味で) 収束する。

Chavel と Karp は [CK] で上記のような事柄を考察した。熱方程式そのものは 1700 年代に解かれていたにも関わらず、最大点の情報を調べようとした研究が 1990 年まで行われていなかったことに驚きである。しかし、[CK] では、「時刻 $+\infty$ で Hot spot は一点になること」は示されているが、「有限時間で一点になること」は示されていない。この問題に対して、Hessian(2 階微分) を計算することで次がわかる。

定理 2.2 ([JS]) 任意の $t \geq (\operatorname{diam}\operatorname{supp} f)^2/2$ に対して、$\sharp\mathcal{H}(t) = 1$ である。

3 Hot spot と領域の情報

Hot spot が提唱された頃は、その初期値問題を初期境界値問題に変えて、いろいろな境界条件を付けてみようという研究が行われた。[JS] は初期境界値問題の Hot spot の基本的な性質を調べた論文である。最近では、初期値を領域 Ω の定義関数 χ_Ω にとって、「Hot spot の情報から領域の情報を取り出そう」という問題意識 (またはその逆) による研究が盛んに行われているように思える。

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ を有界な開集合の閉包をとって得られるような集合 (**body**) とする。初期値問題

$$\begin{cases} \Delta u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t), & x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0, \\ \displaystyle\lim_{t\to+0} u(x,t) = \chi_\Omega, & x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial\Omega. \end{cases}$$

の解を $u(x,t) = H_\Omega(x,t)$ とおく。

$$H_\Omega(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \int_\Omega \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy,\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0$$

と表わされる。すなわち、「時刻 0 での温度分布が Ω の上で 1 で一定、Ω の外側で 0 で一定」という状況を考える。密度関数が簡単になったため、Ω の幾何学的情報から Hot spot の情報が導かれることが期待される。例えば、次が知られる。

定理 3.1 ([KP]) $\mathcal{I}$ を Ω の内心の集合とする。すなわち、

$$R_\infty = \sup_{y \in \Omega} \mathrm{dist}(y, \partial\Omega),\ \mathcal{I} = \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = R_\infty\}$$

とおく。$\sharp\mathcal{I} = 1$ のとき、

$$\lim_{t \to +0} \mathcal{H}(t) = \mathcal{I}$$

が成り立つ。

注意 3.2 $\sharp\mathcal{I} = 1$ という仮定は本質的ではなくて、$\sharp\mathcal{I} \geq 2$ の場合 (Ω が長方形の場合など) でも同様のことが言える。すなわち、Hot spot は $t \to +0$ で $\mathcal{I}$ の内部に埋まることが言える。

定理 2.2 で十分大きい時刻 t に対しては、Hot spot が一点に決まることを見た。これに対して、初期値が簡単であれば、熱核の log-concavity を調べることで、次がわかる。

定理 3.3 ([MS]) Ω が凸であれば、任意の $t > 0$ に対して、$\sharp\mathcal{H}(t) = 1$ である。

定理 2.2 は密度関数が一般の場合で t に粗い条件を付けたもの、定理 3.3 は密度関数を簡単にして t についての条件をなくしたものである。この二つの定理の中間的な主張が [GNN] の **moving plane method** を用いて得られる。

定義 3.4 ([O]) 方向 $v \in S^{m-1}$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を固定する。超平面 $H_{v,b} := \{z \in \mathbb{R}^m |\, z \cdot v = b\}$ に関する折り返しを $\mathrm{Refl}_{v,b}$ とかく。Ω の $H_{v,b}$ に関する上側を

$$\Omega^+_{v,b} := \{x \in \Omega |\, x \cdot v \geq b\}$$

とおく。v 方向に関する上側から $H_{v,b}$ を下げるごとに $\Omega^+_{v,b}$ を $\mathrm{Refl}_{v,b}$ で折り返す。$\Omega^+_{v,b}$ が Ω からはみ出る限界の v 方向に関する高さを $l(v)$ とおく。

$$Uf(\Omega) := \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{z \in \mathbb{R}^m |\, x \cdot v \leq l(v)\}$$

とおき、Ω の **minimal unfolded region** とよぶ。

注意 3.5 ([BMS]) 折り返しの最大の高さ $l : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ は下半連続である。

定義 3.6 ([S2]) 関数 $\gamma : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ が、任意の $v \in S^{m-1}$ と $b \geq \gamma(v)$ に対して、$\mathrm{Refl}_{v,b}\left(\Omega^+_{v,b}\right) \subset \Omega$ をみたすとき、γ を**連続な折り返し関数**とよぶ。連続な折り返し関数の全体を $CF(\Omega)$ とおく。γ に付随する Wulff 図形を

$$W_\gamma(\Omega) := \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{ z \in \mathbb{R}^m | \, z \cdot v \leq \gamma(v) \}$$

とおき、その最小の集合

$$W(\Omega) := \bigcap_{\gamma \in CF(\Omega)} W_\gamma(\Omega)$$

を Ω の **minimal unfolded Wulff shape** とよぶ。

直感的には、$Uf(\Omega)$ が「Ω の真ん中らへんに熱いであろう場所を (moving plane method を用いて) 絞り込んだもの」である。しかし、その方法で、下半連続関数というやや扱いにくい対象を用いているためそれを連続にして、少し大きめの領域を作ったものが $W(\Omega)$ である。これらの領域と、$H_\Omega(\cdot, t)$ の 3 階微分を調べることで 2 階微分の符号を評価し、次を得る。

定理 3.7 ([S2]) $f = \chi_\Omega$ のとき、任意の $t \geq D(\Omega)^2/2$ に対して、$\sharp\mathcal{H}(t) = 1$ である。ここで、

$$D(\Omega) = \sup \{ |z - w| \, |z \in Uf(\Omega), \ w \in W(\Omega) \}$$

である。

定理 3.7 は、「初期値が χ_Ω で簡単だが、Ω は凸領域というほどまで簡単ではない」という意味で定理 2.2 と定理 3.3 の中間と述べた。

他に、[S1] の手法を用いることで「一番熱い場所をさらに熱くする領域の形」がわかる。

定理 3.8 ([S2]) B を m 次元閉球とする。$\mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Vol}(B)$ と仮定する。このとき、

$$\max_{x \in \Omega} H_\Omega(x, t) \leq \max_{x \in B} H_B(x, t)$$

が成り立つ。また、等号は Ω が (測度 0 の集合の差を除いて) 閉球であるときに限り成り立つ。

注意 3.9 Hot spot に限らず、距離核ポテンシャルの最大点の幾何学的性質に関する結果は、[S3]、[S4] などがある。

参考文献

[BMS] L. Brasco, R. Magnanini and P. Salani, *The location of the hot spot in a grounded convex conductor*, to appear in Indiana Univ. Math. J. (2011).

[CK] I. Chavel and L. Karp, *Movement of hot spots in Riemannian manifolds*, J. Analyse Math. **55** (1990), 271-286.

[KP] L. Karp and N. Peyerimhoff, *Geometric heat comparison criteria for Riemannian manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31** (2007), 115-145.

[GNN] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68**(1979), 209-243.

[JS] S. Jimbo and S. Sakaguchi, *Movement of hot spots over unbounded domains in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **182**, 810-835 (1994).

[MS] R. Magnanini and S. Sakaguchi, *On heat conductors with a stationary hot spot*, Anal. Math. **183**, 1-23 (2004).

[O] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. Appl. Math. **48** (2012).

[S1] S. Sakata, *Extremal problems for the central projection*, J. Geom. (2012), to appear.

[S2] S. Sakata, *Movement of centers with respect to various potentials*, preprint.

[S3] S. Sakata, *Uniqueness of generalized radial centers of planar convex bodies*, preprint.

[S4] S. Sakata, *A solid angle comparison criterion*, preprint.

結び目理論でゲームを作ろう

清水 理佳　(広島大学)

1. 結び目図式における領域交差交換

領域交差交換という, 結び目図式の局所変形があります. (岸本健吾氏によって定義されました.) それは下の図のように, 結び目図式のある領域の境界上の全ての交点で一度に交差交換する変形のことです.

図 1: 領域交差交換

領域交差交換について, 次の定理が成り立ちます:

定理. 任意の結び目図式の任意の交差点において, 有限回の領域交差交換によって交差交換できる.

この定理を応用して誕生したのが, **領域選択ゲーム**です. (このゲームは河内明夫先生, 岸本健吾氏との共同発明です.) 領域選択ゲームとは, 下の図のように, 各交点にランプを持つ結び目射影図に対して, 領域を選択していくゲームです. 領域を選択すると, その境界上の全てのランプの ON/OFF が一度に切り替わります. 全てのランプを ON にしたらクリアです.

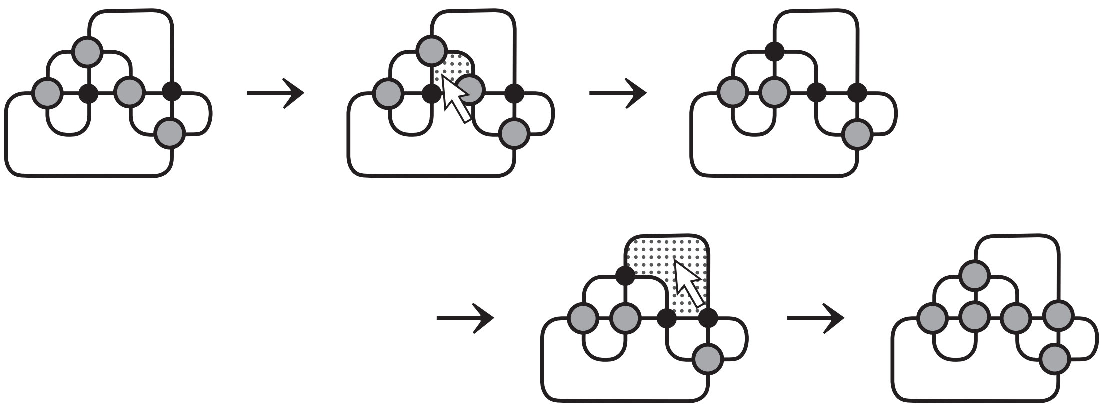


図 2: 領域選択ゲーム

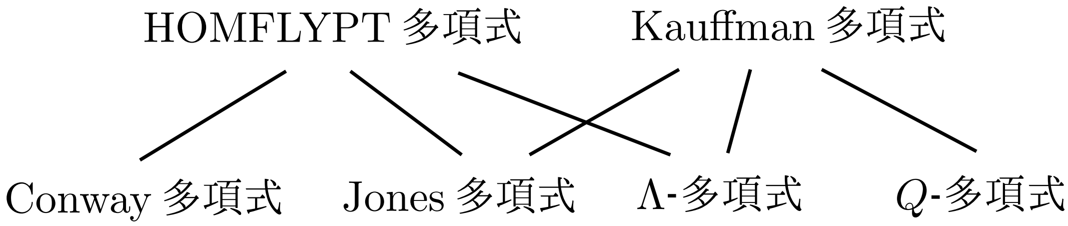
　本講演では, 定理の簡単な証明と, ゲームの誕生秘話 (?) 等を紹介します. さらにゲームの攻略法や最小手数問題等についてもお話いたします.

結び目の多項式不変量について

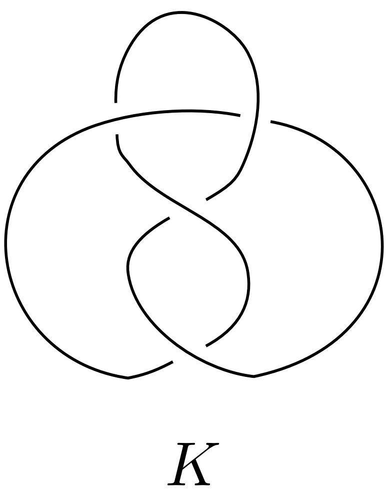
大阪市立大学大学院理学研究科 数物系専攻

後期博士課程 1 年 滝岡英雄

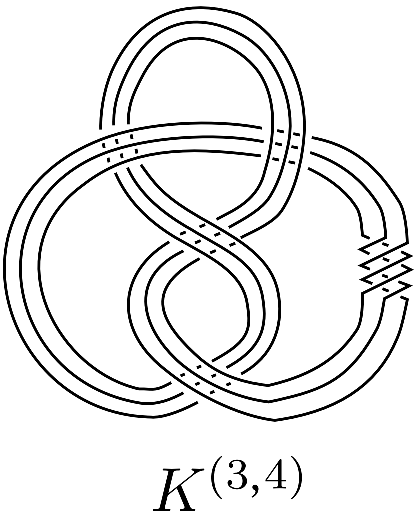
私は絡み目の不変量である HOMFLYPT 多項式と Kauffman 多項式の両方に含まれる Λ-多項式という不変量を研究しています.



特に, Λ-多項式の (p,q) ケーブル化不変量 $\Lambda_{p/q}(K) = \Lambda(K^{(p,q)})$ を研究しています.　($K^{(p,q)}$: (p,q) ケーブル結び目)



K



$K^{(3,4)}$

BOUSFIELD 類について

高知大　立原有太郎

安定ホモトピー論は, 広義には安定ホモトピー圏の構造解析のことである. 安定ホモトピー圏は閉対象モノイド圏であることから, Bousfield 類というものを考えることができ, 大川の定理によってそれらの集まりが集合となっていることが分かっている. その集合にある大小関係を入れたものを Bousfield 束といい, Bousfield 類の大小関係は、Bousfield 局所化の強弱関係を表す. Bousfield 局所化は安定ホモトピー圏の理解のための重要な概念のひとつであるため, Bousfield 束の研究もやはり重要である.

1.Hovey-Palmieri の予想

$\mathbb{B}$ を素数 p で局所化したスペクトラムの圏 $\mathcal{S}$ の Boudfield 束とする. つまり, $\mathbb{B} \ni \langle E \rangle = \{X \in \mathcal{S} :| E \wedge X = 0\}$ であり, 大小関係は $\langle E \rangle \leq \langle F \rangle \Longleftrightarrow \langle E \rangle \supset \langle F \rangle$ である.

定義 $\langle X \rangle < \langle H\mathbb{Z}/p \rangle$ であるときに, $\langle X \rangle$ は strange であるという.
ここで, $H\mathbb{Z}/p$ は mod p Eilenberg−MacLane spectrum のことである.

$\mathbb{DL} = \{\langle X \rangle \in \mathbb{B} \mid \langle X \rangle \wedge \langle X \rangle = \langle X \rangle\}$ は, $\mathbb{B}$ の部分束ではないが分配束となっており, この中では, スマッシュ積は meet になっている.

Hovey-Palmieri の予想 $J = \{\langle X \rangle \in \mathbb{B} \mid \langle X \rangle : \text{strange}\}$ とおくと, $\mathbb{B}/J$ は束として $\mathbb{DL}$ と同型である.

2. 予想の一般化

$a\langle X \rangle = \bigvee \{\langle Y \rangle \in \mathbb{B} \mid \langle Y \rangle \wedge \langle X \rangle = 0\}$ とおく.

定義 $X \in \langle E \rangle \vee a\langle E \rangle$. であるときに, $\langle X \rangle$ は E-wedge strange であるという.

定理 F を field spectrum とすると, $\langle X \rangle$ が F-wedge strange $\Longleftrightarrow \langle X \rangle < \langle F \rangle$.

特に, $H\mathbb{Z}/p$ は field spectrum であるため, $\langle X \rangle$ が starnge であることと E-wedge strange であることは同値である.

Hovey-Palmieri の予想の一般化 $J_E = \{\langle X \rangle \in \mathbb{B} \mid \langle X \rangle : E\text{-wedge strange}\}$ とおけば, $\mathbb{B}/J_E$ と $\mathbb{DL}$ が同型となるスペクトラム E が存在する.

References

1. M. Hovey and J. H. Palmieri, The structure of the Bousfield lattice, in Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), 175-196, Contemp. Math., 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
2. M. Hovey, J. H. Palmieri and N. P. Strickland, Axiomatic stable homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc. 128 (1997), no. 610, x+114 .

結び目と素数の岩澤理論

九州大学 M2、植木潤

はじめに

私は昨年度、「数論的トポロジー」の哲学である MKR-dictionary に基づき、代数体の拡大における幾つかの定理を３次元多様体の分岐被覆の文脈に “ 翻訳 ” し、証明し、示唆を得た（[U1]）。更に、代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に関する「岩澤理論」の３次元多様体類似を考察し、岩澤 λ 不変量に関する木田の公式の類似などを得た（[U2]）。

以下では 1. この分野と辞書の紹介、2. 自分の研究の経緯 を少し詳しく述べ、最後に 3. 岩澤不変量とその類似 についての簡単なまとめを記す。

この記事には、昨年度の TFS 報告集の記事の続編、というニュアンスを持たせてみたいと思っている。つまり一年前に語った「夢」がどの程度実現されているかを確認する。冗長になるかもしれないがお許し願いたい。

1 Arithmetic Topology

「数論的位相幾何学」とは、結び目と素数、代数体と３次元多様体の類似を研究するものである。森下昌紀は数論幾何における “ 代数体と関数体の類似 ” に疑問を感じ、この分野を創始した [Mor11]。数論幾何的な描像においては、Spec($\mathbb{Z}$) は１次元のスキームであるが、これは１次元アフィン直線の類似であり、素数はその上の点の類似と見做される。しかし Spec($\mathbb{Z}$) から素数 3 を除いた空間 $X(3)$ と素数 5 を除いた空間 $X(5)$ の基本群は全く異なり、逆にこの基本群により 3 と 5 が区別される。しかるにアフィン直線から点 P を除いた空間と、別の点 Q を除いた空間の基本群は当然同じで区別がつかない。この意味で「素数はスキーム上の点ではない」と言える。じっさい素数は元々強烈な個性を持っており、$X(3)$ の基本群も極めて巨大で複雑である。

そこで森下が辿り着いたのが「素数は３次元空間内の極めて複雑な結び目である」という描像であった。この見方の一つの成果として、素数たちの Milnor 不変量（高次まつわり数）が導入され、冪剰余記号の解釈が与えられた。これは代数体と関数体の類似の視点からは決して得られないものであった。

なお、森下とは独立に、1960 年代に B. Mazur もこの類似は指摘しており [Maz64]、それから M. Kapranov, A. Reznikov, A. Sikora らによって体系的に研究されてきた。ここに既存の「辞書」の一部を掲載する。

代数体 k, 整数環 Spec($\mathcal{O}_k$)	3 次元多様体（manifold）M
素意であるの集合 $S=\{\mathfrak{p}_1,...,\mathfrak{p}_r\}$	絡み目（結び目の集合）$L=\{K_1,...,K_r\}$
étale 基本群 $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k))$ $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)-S)$	基本群 $\pi_1(M)$ 絡み目群 $\pi_1(M-L)$
代数体の拡大 ℓ/k	（絡み目で分岐する）分岐被覆 $h: N\to M$
イデアル群 $I(k)$	1-サイクル群 $Z_1(M,\mathbb{Z})$
単項イデアル群 $P(k)$	1-バウンダリー群 $B_1(M,\mathbb{Z})$
イデアル類群 $Cl(k)=I(k)/P(k)$	1-ホモロジー群 $H_1(M,\mathbb{Z})=Z_1(M,\mathbb{Z})/B_1(M,\mathbb{Z})$
単数群 $\mathcal{O}_k^*$	2-ホモロジー群 $H_2(M,\mathbb{Z})$, or 2-サイクル群 $Z_2(M,\mathbb{Z})$
Artin reciprocity $Cl(k)\cong \mathrm{Gal}(k_{ab}^{ur}/k)\cong \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k))_{ab}$ k_{ab}^{ur}: k のヒルベルト類体	Hurewicz 同型 $H_1(M,\mathbb{Z})\cong \mathrm{Gal}(M_{ab}/M)\cong \pi_1(M)_{ab}$ M_{ab} ： M の不分岐最大アーベル拡大

特に完全列:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_k^* & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & I(k) & \longrightarrow & Cl(k) & \longrightarrow & 1, \\ 0 & \longrightarrow & Z_2(M) & \longrightarrow & C_2(M) & \longrightarrow & Z_1(M) & \longrightarrow & H_1(M) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

2　昨年度からの夢と、これまでの成果

上述の、代数体と 3 次元多様体の類似の「辞書」を手がかりに、次の三点を目標に研究を開始し、後述の成果を得た。

Step 1. 辞書を用いて既存の主張の「翻訳」をする。

Step 2. 辞書の項目を増やす。類似の本質を探る。

Step 3. 辞書から示唆を得て、幾何や数論の固有の問題意識に対しご利益をもたらす。

まず景気付けに [Was82] にある岩澤の定理（代数体の拡大におけるイデアル類群・類数の振る舞いを記述する）の多様体類似を示した。次に [Yok67] にある色々な命題の翻訳を考え、「Hilbert の定理 90」の多様体類似などガロアコホモロジーに関する基本命題の類似を示した。さらに既存の辞書を修正し、単数群のガロアコホモロジーの類似として 2-サイクル値のガロアコホモロジー を考察し、これが分岐被覆の新しい位相不変量であることを発見した。またその応用として「種の理論」型の、分岐指数の公式を示した（[U1]）。

そうしていよいよ、数論において局所と大域をつなぐものである「イデール理論」の多様体類似の研究を開始した。（これが完成すれば、この分野は一層深いものとなるだろう。）数論においてこれは代数的ゼータと解析的ゼータをつなぐものでもあったから、砂田の多様体のゼータ [Sun88] の改良も併せて考えることにした。

するとある日、水澤靖先生からメールをいただき、私が発見した不変量の意味付けを探るヒントとなるであろう、単数群のガロアコホモロジーに意味を付与する、岩澤不変量に関する論文 [FKOT97] を紹介された。実は [HMM06]、[KM08] で岩澤不変量の多様体類似が提案されており、それらは結び目の Alexander 多項式の p 進的性質を反映する。

ところで、岩澤健吉の仕事は i) $\mathbb{Z}_p$ 拡大と岩澤不変量の研究 ii) 代数的ゼータと解析的ゼータの対応という哲学の発見という歴史的流れがあったから、i) の類似を考えることは、イデールの研究への寄与も期待される。

そこでまず [FKOT97] から遡り [Iwa81] の「翻訳」を実行した。すなわち $\mathbb{Z}_p$ 拡大の無限次ガロア理論の多様体類似を考案・整備し、副有限群のガロアコホモロジーを計算し、p-adic 表現の議論に持ち込むことで、岩澤 λ-不変量に関する「木田の公式」の多様体類似を示した。ここで特筆すべきは、私が行った「辞書の修正」が本質的に効いて、証明の類似がほとんどそのまま回るということと、先に述べた不変量が現れることである（[U2]）。

3　岩澤類数公式とその類似

p を素数とする。体 K が $\mathbb{Z}_p$ 体であるとは、ある有限次代数 k とその $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 拡大 k_n の包含列があり、その合併体として K が得られるということである。（注意、このような列は一般に複数ある。）

これが良い条件を満たすとき、k_n のイデアル類群 $Cl(k_n)$ に対し、ある定数 $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ があって、十分大きな n に対して

$$\#Cl(k_n) \otimes \mathbb{Z}_p = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する。この式を岩澤類数公式、これらの定数を K/k の岩澤不変量という。

この類似が [HMM06],[KM08] で示されている。

M_1 を有理ホモロジー球面、L をその中の link とし、$X := M_1 - L$ に対し $\tau_1 : H_1(X) \to \mathbb{Z}$ 全射を任意に一つ取り固定する。この時 $\mathrm{Ker}(\tau_1) \lhd H_1(X)$ に対応する X の最大 abel 被覆の部分被覆があるが、そのメリディアンによる完備化によって*1、M_1 の p 冪次分岐被覆の列 $... \to M_{p^i} \to ... \to M_1$ が得られる。これを $\mathbb{Z}_p$ 体の類似物と見る。このとき、ある定数 $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ があって、十分大きな n に対して

$$\#H_1(M_{p^n}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する。*2 この式を岩澤型公式、これらの定数を $M = (M_1, L, \tau_1)$ の岩澤不変量という。

例　$M_1 = S^3$, L をホワイトヘッドリンクとし、そこで分岐する標準的な巡回 p^n 次被覆を考える。この時 $\lambda = 3, \mu = \nu = 0$ である。

以上はそれぞれ、岩澤加群とアレクサンダー加群、岩澤多項式とアレクサンダー多項式を用いて説明することができる。特に多様体とリンクの岩澤不変量は、アレクサンダー多項式の p-adic な性質を反映する。

*1 Fox 完備化という、L の上にある部分を埋め戻してやる操作がある。　*2 $M_1 = \mathrm{S}^3$ のとき [HMM06]、M_1:$\mathbb{Q}$-HS^3 のとき [KM08]

4 p 進表現と木田の公式

4.1 古典的 Riemann-Hurwitz の公式と、$\mathbb{Z}_p$ 体の拡大に対する木田の公式

$f : R \to R$ をコンパクトで連結なリーマン面の n 次被覆とし、g, g' を R, R' の種数とする。このとき古典的 Riemann-Hurwitz の公式により、

$$2g' - 2 = (2g-2)n + \textstyle\sum_{P' \in R'}(e(P') - 1)$$

が成立つ。ここで $e(P')$ は P' での被覆 f の分岐指数である。

木田は代数体に対して、この公式の非常に興味深い類似を証明し、そこに岩澤は p 進表現を用いて新たな証明を与えた。

定理 [Iwa81] p を任意の素数とする。$\mathbb{Z}_p$ 体[*3]の p 次拡大 L/K に対し、無限素点で不分岐で、$\mu_K = 0$ を仮定すると、適当な p 進表現たちに対して（h_i は単数群値ガロアコホモロジーのランク。）

$$\pi_{L/K} = \lambda_K \pi_G \oplus (\textstyle\bigoplus_v \pi'_v) \oplus (h_2 - h_1)\pi_{p-1}$$

が成立する。特に両辺の係数を比較して、次を得る：

$$\lambda_L = p\lambda_K + \textstyle\sum_w (e(w/v) - 1) + (p-1)(h_2 - h_1),$$

4.2 $\mathbb{Z}_p$-manifold と、その分岐被覆に対する木田の公式

$\mathbb{Z}_p$ 体とは $\mathbb{Q}$ 上有限次代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大であり、上ではそのさらに拡大を考えた。その類似物として、ここでは有理ホモロジー球面の巡回分岐被覆の射影極限を一つの数学的対象として考え、それらの分岐被覆と呼ばれるべきものを考えたいが、実際に、岩澤による証明の類似が完全にパラレルに進むように、これらを適切に定義することができる（[U2]）。そして、次が成立つ。

定理 [U2] 適当な仮定の下で、（h_i は 2-サイクル値ガロアコホモロジーのランク。）

$$\pi_h = \lambda_M \pi_G \oplus (\textstyle\bigoplus_v \pi'_v) \oplus (h_2 - h_1)\pi_{p-1}$$

が成立する。特に両辺の係数を比較して、次を得る：

$$\lambda_N = p\lambda_M + \textstyle\sum_w (e(w/v) - 1) + (p-1)(h_2 - h_1).$$

5 これから

(1) 幾何的イデール理論の完成… 代数体の拡大と多様体の被覆空間の双方にガロア理論があることは古くから知られているが、より深く、「ヒルベルト理論」といわれる分岐を込めたものの 3 次元多様体への類似が存在する [Mor11]。この類似をさらに深く推し進める。
(2) 岩澤理論の類似…手をつけた周囲に自然な問題意識が沢山残っている。理論の整備と、応用価値の吟味。
(3) 他にも次のような問題意識が示唆されているので、可能な限りアプローチしてみたい。
(a) A.Reznikov の、単数群と非圧縮曲面の類似を通じての virtual Haken 予想へアプローチ [Rez00]。
(b) アデール上の積分と平坦接続上の積分の類似から、ある種の結び目不変量（Casson 不変量）の数論的類似を考察し、それを通じて類似の本質に迫ること。
(c) 数理物理等に関係して (i) C. Deninger による一連の研究や、(ii) Dimofte, Gukov, Lennels, Zagier らによる arithmetic TQFT などがある。

[*3] $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 k の p^n 次拡大の順極限で、良い条件を満たすもの。

References

[FKOT97] Fukuda, Komatsu, Ozaki, Taya, *"On Iwasawa λ_p-Invariants of Relative Real Cyclic Extensions of degree p"*, Tokyo J. Math. Vol. 20, No. 2, 1997

[HMM06] Hillman, Matei, Morishita, *"Pro-p Link Group and p-Homology Groups"*, Primes and Knots, Contemporary Math., Amer. Math. Soc. 416 (2006)

[Iwa81] K. Iwasawa, *"Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields"*, Tohoku Math. Journ. 33 (1981)

[Iwa59] K. Iwasawa, *On Γ-extension of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 65. (1959), 183-226.

[KM08] Kadokami, Mizusawa *"Iwaswa Type Formula For Covers of a Link in a Rational Homology Sphere"*, Journ. of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 17, No. 10 (2008)

[Sun88] T. Sunada, "基本群とラプラシアン一幾何学における数論的方法", 紀伊国屋数学叢書, 1988

[Maz64] B. Mazur, *"Remark on the Alexander polynomial"*, 1963-64,
`http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf`

[Mor11] M. Morishita, *"Knots and Primes: An Introduction to Arithmetic Topology"*, Universitext, Springer, 2011.

[Mor10] M. Morishita, *"Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings"*, Sugaku expositions, 23, 1, 1-30, 2010.

[Rez00] A. Reznikov, *"Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds"*, Selecta Math. (N.S.), 6(1):1-39, 2000.

[U1] J. Ueki, *"On the homology of branched covering of 3-manifolds"*, submitted (Nagoya Math. J.)

[U2] J. Ueki, *"On the Iwasawa invariants for 3-manifolds"*. preprint

[Was82] L. C. Washington *"Introduction to Cyclotomic Fields"*, GTM 83, Springer, 1982

[Yok67] H. Yokoi, *"On the class number of a relatively cyclic number field"*, Nagoya Math. J., 29 (1967)

他に、岩澤理論の類似については次の解説記事が分かりやすいので挙げておく。

・門上晃久, 水澤靖「代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に類似する絡み目の巡回分岐被覆について」

`http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~taya/sendaiNC/2005/report/kadokami-mizusawa.pdf`

ブレイド群の自然な作用とその応用について

矢口義朗
群馬工業高等専門学校一般科目（自然）

Artin は，次数 n のブレイド群を $n-1$ 個の標準的生成元を用いて２種類の関係式で表示したことはよく知られています。また,（少し厳密さに欠けるが,）次数 n のブレイド群は n 個の穴のあいた円板の写像類群に同型であることが知られています。この同型写像によって，次数 n のブレイド群による，階数 n の自由群への右作用が与えられます。その結果，次数 n のブレイド群は任意の群 G の n 個の直積への右作用を誘導し，これを Hurwitz 作用（以下，単に H-作用）といいます（セミナーではもっとストレートに定義を述べます)。群の直積の２つの元が H-作用で移りあうとき，それらは H-同値であるといいます。

H-作用は，しばしば低次元トポロジーの分野への応用を持ちます。私は，主にブレイド群の直積における H-作用について研究しており，２次元ブレイドや２次元絡み目への応用を考えています。

２次元ブレイドとは，４次元球体へ埋め込まれたある条件をみたす曲面（もっと大まかにいえば,「ブレイドの２次元版」）です。２次元ブレイドは，Viro によって定義され，Kamada を中心に発展し続けてきた概念です。Kamada によって，２次元ブレイドの同値類の集合からブレイド群の直積の H-同値類の集合への単射写像が存在することが示されました。したがって，ブレイド群の直積の２つの元が H-同値かどうか判定する方法をみつかると，２つの２次元ブレイドが同値かどうか判定できることになります。しかし，ブレイド群の複雑さのせいで，その方法が存在するかどうかさえ，知られておりません。そこでアプローチとして，不変量の探求が考えられます。ブレイド群からの準同型を持つ群（例えば対称群）の直積の H-同値類は，ブレイド群の直積の H-同値不変量，つまり２次元ブレイドの不変量となります。

Teicher-Itzhac は，対称群の直積の２つの元が H-同値かどうか判定する明快な方法を与え，２次元ブレイド全体を有限個のクラスに分類しました。私は現在，ブレイド群から対称群を拡大した無限群への準同型を考え，それを用いて２次元ブレイド全体を無限個のクラスに分類しているところです。特に，ブレイド群におけるジョンソン準同型の記述（久野雄介氏（津田塾大）との共同研究）が非常に役立っています。こうして，２次元ブレイドの実用的な（計算可能な）不変量をいくつかみつけることが出来ました。

さて，任意の絡み目はブレイドの閉包で表せることが知られていますが，向きづけ可能な２次元絡み目に限ると，この事実の２次元版が成り立つことが，Viro と Kamada により知られています。そこで今後は，２次元ブレイドの不変量を用いた，向きづけ可能な２次元絡み目の不変量の構成にも取り組んでいきたいです。

現在取り組んでいる課題

高知大学大学院 理学専攻数学コース 修士１年
吉良 希恵

私は現在 [5] の論文より May Spectral Sequence(MSS) を用いて、球面の安定ホモトピー群 $\pi_*(S)$ の構造決定の計算方法を勉強しています。

まずは MSS を理解するために具体的に計算し、理解する上で必要な知識を身につけています。今はまだ理論的な部分まで勉強が進んでいないので、論文を読み進めながら少しずつ理解していこうと思っています。

今回のセミナーで皆さんの発表を聞き、今後の自分の研究の糧にしていきたいと思っています。

参考文献

[1] Liu, Xiu-Gui, A new infinite family $\alpha_1\beta_2\gamma_s$ in $\pi_?(S)$.

[2] Liu, Xiugui, Zhao, Hao, On two non-trivial products in the stable homotopy groups of spheres. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 13 (2007), no. 2, 367-380.

[3] Liu, Xiu-Gui, Some infinite elements in the Adams spectral sequence for the sphere spectrum. J. Math. Kyoto Univ. 48 (2008), no. 3, 617-629.

[4] Liu, Xiu Gui; Jiang, Shan Shan Convergence of the products $b_0g_0\gamma_s$ in the Adams spectral sequence. (Chinese) Adv. Math. (China) 38 (2009), no. 3, 319-326.

[5] Zhong, Li-nan, A New Non-triviality element in the Stable Homotopy of Spheres, preprint.